No D'ORDRE : 72-42

THÈSE

PRESENTEE

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE

DOCTEUR–INGENIEUR

par

Robert STAUB,

INGENIEUR CIVIL DU G.R.E.F.

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES ONDES DE GRAVITE EN EAU PEU PROFONDE

Soutenue le 28 Février 1972 devant la Commission d'Examen

Jury :

M. KRAVTCHENKO	*Président*
MM. GERMAIN	*Examinateurs*
GASTINEL	
DAUBERT	*Examinateur-Invité*

No D'ORDRE : 72-42

THÈSE

PRESENTEE

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE

DOCTEUR–INGENIEUR

par

Robert STAUB,

INGENIEUR CIVIL DU G.R.E.F.

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES ONDES DE GRAVITE EN EAU PEU PROFONDE

Soutenue le 28 Février 1972 devant la Commission d'Examen

Jury :

M. KRAVTCHENKO	*Président*
MM. GERMAIN GASTINEL	*Examinateurs*
DAUBERT	*Examinateur-Invité*

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Président : Monsieur Michel SOUTIF

Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

LISTE DES PROFESSEURS

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire

MM.	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique

MM.	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique

MM.	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques Appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale

MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie

MM.	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale

MM.	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale

MM.	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-Chirurgie
	SHAN Jean-Claude	Chimie Générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie Pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRE DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 16 Novembre 1971

A ma femme
et à ma fille.

AVANT - PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire National d'Hydraulique, Département du Service Technologie Générale, Applications de l'Electricité et Hydraulique d'Electricité de France. Je remercie Monsieur LEBRETON, le Chef de ce Laboratoire, de m'avoir permis d'accomplir ces recherches dans de très bonnes conditions.

Je tiens à remercier le Ministère de l'Equipement pour l'intérêt et l'aide financière qu'il a bien voulu m'apporter, permettant ainsi la réalisation de cette étude.

Monsieur André DAUBERT m'a fait l'honneur de m'accueillir dans sa Division et de me confier cette étude. J'ai trouvé auprès de lui toute l'aide dont j'ai eu besoin pour aborder ce sujet difficile et il n'a jamais ménagé son temps pour m'éclairer de ses conseils. J'ai pu ainsi profiter de sa grande culture scientifique et de son expérience. Qu'il me soit permis de lui rendre un fidèle hommage et de l'assurer de ma gratitude.

J'exprime à Monsieur le Professeur Jean-Pierre GERMAIN ma plus vive reconnaissance pour avoir accepté de diriger mes recherches. J'ai pu, par les discussions que j'ai eues avec lui et par la lecture de ses travaux, élargir mes connaissances, surtout en ce qui concerne la houle.

Je remercie très respectueusement Monsieur le Professeur Julien KRAVTCHENKO de m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury de ma thèse.

Monsieur le Professeur GASTINEL a accepté de faire partie du Jury de ma thèse ; je l'en remercie.

Je remercie aussi tout le personnel de la Division Recherches du Laboratoire National d'Hydraulique pour l'amitié qu'il m'a témoignée pendant les deux années que j'ai passées parmi eux.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE I – FORMULATION DES EQUATIONS DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE 12

CHAPITRE II – LES METHODES D'APPROXIMATION DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE 19

CHAPITRE III – THEORIE DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE EN PREMIERE ET EN DEUXIEME APPROXIMATIONS 28

CHAPITRE IV – LES APPROXIMATIONS DES ONDES LONGUES AVEC LA PRISE EN COMPTE D'UN FOND VARIABLE ET DU FROTTEMENT 38

CHAPITRE V – LES APPROXIMATIONS DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE EN VARIABLES D'EULER 53

DEUXIEME PARTIE

CHAPITRE VI – ETUDE DES CARACTERISTIQUES ET PROPAGATION DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE 62

CHAPITRE VII – LES EQUATIONS DE CHOC 89

TROISIEME PARTIE

CHAPITRE VIII – LA SOLUTION DE LA HOULE EN EAU PEU PROFONDE . . . 100

CHAPITRE IX – COMPARAISON NUMERIQUE DES DIVERSES THEORIES DE LA HOULE EN EAU PEU PROFONDE 112

QUATRIEME PARTIE

CHAPITRE X – INTEGRATION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE PREMIERE APPROXIMATION DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE 142

ANNEXE 1 : FIGURES

BIBLIOGRAPHIE.

I N T R O D U C T I O N

1 - POSITION DU PROBLEME.

Cette étude est consacrée à la théorie des ondes longues avec courbure, c'est-à-dire, des ondes de gravité se propageant en eau peu profonde. L'étude sera donc limitée aux ondes se propageant dans un canal de profondeur très faible par rapport à la longueur d'onde. Ce type d'écoulement est particularisé par une disproportion entre les grandeurs horizontales et les grandeurs verticales; les premières étant plus importantes que les dernières.

Soit un repère orthonormé direct $Oxyz$. Le plan Oxy sera confondu avec le fond supposé horizontal et Oz sera orienté suivant une verticale ascendante. Dans ce repère considérons le domaine fluide Ω compris entre :

- un fond Σ_1 , connu a priori, d'équation

$$H_1 (x, y, z, t) = 0$$

- une surface libre Σ_2, inconnue a priori, d'équation

$$H_2 (x, y, z, t) = 0$$

et deux plans verticaux infiniment distants l'un de l'autre.

Le fond et la surface libre sont des interfaces et nous devrons exprimer qu'aucun débit ne les traverse

$$\frac{D H_1}{Dt} = 0$$

$$\frac{D H_2}{Dt} = 0$$

Puisque Σ_2 est une surface libre elle est une isobare car la pression y est toujours égale à la pression atmosphérique. Cette condition s'exprime par :

$$p\,(M,\,t) \;=\; 0 \qquad\qquad M \in H_2\,(x,\,y,\,z,\,t)$$

où $p\,(x,y,z,t)$ est la pression relative à la pression atmosphérique.

Le problème consiste à déterminer le domaine Ω et à rechercher les fonctions $u\,(x,y,z,t)$, $w\,(x,y,z,t)$ et $v\,(x,y,z,t)$ - u, w et v étant respectivement les composantes du vecteur vitesse suivant Ox, Oy et Oz - ainsi que la fonction $p\,(x,y,z,t)$ qui vérifient les équations de l'hydrodynamique, compte tenu des hypothèses que nous devrons faire pour caractériser les ondes de gravité en eau peu profonde.

Nous reviendrons par la suite sur ces hypothèses mais il convient de préciser ici que, nous intéressant aux ondes longues avec courbure, nous devrons supposer que les grandeurs verticales - et plus particulièrement l'accélération verticale - sont faibles mais non nulles comparées aux grandeurs horizontales.

Les équations de l'hydrodynamique expriment :

- la conservation de la masse et du volume (le fluide est supposé incompressible)

$$\mathrm{Div}\ \vec{V} \;=\; 0 \qquad\qquad \text{(Equation de continuité)}$$

- la conservation des forces d'inertie, de volume et de pression.

$$\frac{\overrightarrow{DV}}{Dt} \;=\; \vec{F} \;-\; \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ p \qquad \text{(Equation dynamique)}$$

Nous négligerons dans cette étude les effets dûs à la tension superficielle et à la viscosité qui n'affectent pratiquement pas les ondes de gravité lorsque le rapport d/λ est suffisamment faible - d étant le tirant d'eau moyen et λ étant la longueur d'onde -. On sait que lorsque le tirant d'eau est faible et que le rapport d/λ est très grand, les forces de viscosité deviennent prépondérantes et les ondes sont alors appelées ondes capillaires. Pour les ondes longues avec courbure qui sont caractérisées par un rapport d/λ très petit

$$\frac{d}{\lambda} \ll 1$$

les forces de viscosité sont négligeables devant la gravité.

Pour pouvoir résoudre le problème ainsi posé il faut se donner soit des conditions initiales soit des conditions de périodicité ainsi qu'une distribution des tourbillons ; selon que l'on traite un problème aux conditions initiales ou un problème périodique.

Pour un problème aux conditions initiales la distribution des tourbillons sera implicitement donnée lorsqu'on se donnera les vitesses initiales. On sait qu'en vertu du théorème de KELVIN, cette distribution des tourbillons ne sera pas affectée pour l'écoulement. Par contre pour un problème périodique la condition de périodicité ne suffit pas. Il faut se donner explicitement ou implicitement la distribution des tourbillons qui caractérisera la solution et fermera le problème.

Il convient de remarquer ici que pour traiter un problème périodique on devra se placer dans un repère animé d'une vitesse de translation uniforme C par rapport auquel l'écoulement sera permanent. On exprimera les équations de l'hydrodynamique dans ce repère pour une transformation du groupe de GALILEE et, en supposant que cette translation se fait suivant l'axe Ox, on recherchera les fonctions $u(X,y,z)$, $w(X,y,z)$, $v(X,y,z)$ et $p(X,y,z)$ - on a fait $X = x - Ct$ - qui vérifient ces équations. La solution obtenue dépendra d'un paramètre qui est la vitesse de translation du nouveau repère OXyz. On ne connaît pas de moyens analytiques qui permettent de déterminer ce paramètre. On peut, pour des hypothèses physiques, en obtenir une estimation; et ces hypothèses sont généralement basées sur la constatation expérimentale que les houles de laboratoire ont un courant de masse pratiquement négligeable et donc que les trajectoires des particules sont presque des orbites fermées.

Dans beaucoup d'études sur la houle la célérité a été définie comme étant la vitesse de translation qui rend le mouvement d'une particule rigoureusement oscillatoire à une profondeur déterminée. Par exemple STOKES [1880] a défini la célérité de la houle en profondeur finie en supposant que le mouvement d'une particule du fond soit purement oscillatoire. On peut aussi définir la célérité comme étant la vitesse de translation qui donne, dans le repère lié à la terre, un débit de masse bien défini - généralement

supposé nul - à travers une section de largeur unité, en moyenne sur une période. C'est la définition que nous utiliserons dans cette étude et nous supposerons un débit de masse nul. On pourrait imaginer d'autres définitions, toutes aussi arbitraires que celles que nous avons indiquées; mais les définitions que nous avons données sont les plus utilisées car elles sont en accord avec l'observation expérimentale des houles de laboratoire.

2 - BREF HISTORIQUE DE L'ETUDE DES ONDES LONGUES.

Le problème des écoulements à surface libre est d'une grande complexité lorsqu'on l'envisage dans toute sa généralité, c'est pourquoi, jusqu'à la fin du XVIIIème siècle les hydrauliciens se sont bornés à l'étude des écoulements permanents, c'est-à-dire les écoulements dans lesquels la vitesse de l'eau est invariante dans le temps. Ce sont les mathématiciens qui les premiers s'attaquèrent à l'étude des ondes liquides [LAPLACE (1775), LAGRANGE (1781)] .

Par la suite, les mathématiciens portèrent leurs efforts sur l'étude des ondes périodiques, et en 1802 GERSTNER présenta la première solution rigoureuse d'une houle rotationnelle en profondeur infinie. L'étude de la houle fut poursuivie ensuite d'une façon très fructueuse pour aboutir, entre autre, à une théorie de la houle irrotationnelle en profondeur infinie [STOKES (1847), LEVI-CIVITA (1925)] et en profondeur finie [STOKES (1847), STRUIK (1926)] , ainsi qu'à une théorie de la houle en eau peu profonde [KORTEWEG et DE VRIES (1895), FRIEDRICHS (1948), KELLER (1948)] .

En ce qui concerne l'étude des intumescences, il semble que ce soit l'italien BIDONE (1823) qui entreprit les premières études expérimentales, pour expliquer la propagation des marées dans les fleuves; mais la première étude théorique de ces ondes est due à BARRE de SAINT-VENANT (1871) qui donna une première approximation de ces ondes. Il a fallu attendre la fin de la Deuxième Guerre Mondiale pour que l'on puisse utiliser les équations de BARRE de SAINT-VENANT pour traiter un problème aux conditions initiales et aux limites [CRAYA (1945)] . Depuis l'avènement des calculatrices électroniques, les équations de BARRE de SAINT-VENANT ont connu une large utilisation pour l'étude d'un bon nombre de problèmes d'écoulements à surface libre non permanents.

BOUSSINESQ [1877], en voulant améliorer l'approximation de BARRE de SAINT-VENANT, a proposé une approximation des ondes longues dans laquelle il a tenu compte de la courbure des filets liquides. Alors que SAINT-VENANT avait basé sa théorie sur l'hypothèse d'un écoulement par tranches avec une distribution hydrostatique des pressions, BOUSSINESQ n'a fait qu'une hypothèse sur la courbure des filets liquides qu'il suppose faible mais non nulle. La solution de SAINT-VENANT, qui suffisait pour expliquer les observations de RUSSELL [1844] et de BAZIN [1865] , fut préférée à celle de BOUSSINESQ en raison de sa relative simplicité. L'approximation de BOUSSINESQ est intéressante car elle a permis à cet auteur de retrouver la solution de RAYLEIGH [1876] de l'onde solitaire.

KORTEWEG et DE VRIES [1895] modifièrent la méthode de RAYLEIGH et présentèrent une théorie des ondes longues avec courbure. Ces auteurs ont intégré leurs équations avec une hypothèse de périodicité pour obtenir une solution cnoïdale de la houle. Cette solution donne pour cas limite l'onde solitaire de BOUSSINESQ et RAYLEIGH. Il est intéressant de noter que BOUSSINESQ (*) avait, dès 1877, obtenu une équation différentielle du type de celle de KORTEWEG et DE VRIES et qui donnait aussi comme cas limite l'onde solitaire. Cette équation différentielle s'intègre facilement par les fonctions elliptiques de JACOBI pour donner une solution également cnoïdale mais BOUSSINESQ s'est contenté d'indiquer la façon d'intégrer son équation différentielle sans la faire.

SERRE [1953] s'inspirant des travaux de BOUSSINESQ, présenta une approximation qui généralisait les équations de BARRE de SAINT-VENANT en tenant compte de la courbure des filets liquides. Il se donna une distribution uniforme des vitesses horizontales, mais ne supposa pas une distribution hydrostatique des pressions. Ses équations sont assez voisines de celles de BOUSSINESQ, car SERRE a conservé les termes produits de dérivées que BOUSSINESQ avait négligés. Cette formulation des ondes longues faite par SERRE présente un intérêt mais aussi quelques défauts que nous verrons plus loin.

(*) BOUSSINESQ J. Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoires de l'Académie des Sciences, Sci. Math.& Phy., Tome XXIII, (1877)

On trouvera à la page 392 de ce mémoire l'équation différentielle obtenue par BOUSSINESQ ainsi que les commentaires sur la forme de ces ondes. On remarquera aussi que l'auteur indique la façon d'intégrer cette équation différentielle.

Toutes ces théories ont été obtenues par des méthodes basées sur certains caractères observés des ondes longues. Ces auteurs obtiennent leurs approximations en faisant une hypothèse sur la courbure des filets liquides qu'ils supposent tous très faible mais non négligeable. De là ils déduisent l'ordre de grandeur des dérivées successives des variables et - à l'exception de SERRE - négligent certains termes contenant des produits de dérivées qu'ils considèrent comme étant très faibles.

En 1948, FRIEDRICHS proposa une théorie qui est une approche très originale du problème des ondes longues et qui est la première formulation des ondes longues qui soit faite par une méthode mathématiquement rigoureuse. Cet auteur propose de rechercher les approximations des ondes longues par une méthode de perturbation et il introduit l'hypothèse des ondes longues directement en choisissant comme paramètre de perturbation ε le rapport de la profondeur moyenne à la longueur d'onde, ce rapport étant élevé au carré,

$$\varepsilon = \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2$$

d étant la profondeur moyenne et λ étant la longueur d'onde. En vertu de l'hypothèse des ondes longues ce rapport est considéré comme étant petit. Mais, en introduisant ce paramètre, FRIEDRICHS ne se contente pas de mettre en évidence la petitesse constatée des vitesses verticales vis-à-vis des vitesses horizontales; il augmente encore cette petitesse des vitesses verticales en choisissant un rapport de la vitesse horizontale de référence à la vitesse verticale de référence qui soit de l'ordre du rapport de la profondeur moyenne à la longueur d'onde. Avec ces vitesses de référence il adimentionalise les équations de l'hydrodynamique et utilise la méthode de perturbation pour rechercher les approximations des ondes longues. On voit donc que l'idée de FRIEDRICHS est d'utiliser au second degré l'hypothèse des ondes longues. L'utilisation de la méthode de FRIEDRICHS consiste à écrire à chaque ordre en ε, le système fourni par la perturbation et de résoudre ce système.

FRIEDRICHS a utilisé sa méthode pour retrouver à l'ordre 0 la solution de SAINT-VENANT des ondes longues sans courbure. KELLER [1948] a utilisé la même méthode pour retrouver la solution de KORTEWEG et DE VRIES comme solution de première approximation. Enfin LAITONE [1960] obtenait la solution cnoïdale de deuxième approximation. La méthode de FRIEDRICHS qui donne toutes les solutions connues des ondes longues est une méthode rigoureuse.

L'existence des solutions cnoïdales a été démontrée par LAURENTIEV [1947] et par LITTMAN [1957] et l'existence de l'onde solitaire a été démontrée par FRIEDRICHS et HYERS [1954]. TER-KRIKOROV [1960] a démontré l'existence de l'onde solitaire rotationnelle.

Toutefois, il faut remarquer que la théorie de FRIEDRICHS nécessite l'hypothèse a priori d'un système d'axes galiléen, ce qui ne permet pas la prise en compte d'un fond variable. Elle ne permet pas non plus l'étude des écoulements non périodiques comme, par exemple, les intumescences à front ondulé mises en évidence par FAVRE [1935]. On sait, par les travaux de MICHE [1944], que l'utilisation des variables de LAGRANGE permet de ne pas utiliser l'hypothèse a priori d'un système d'axes mobiles et permet, au moins sur un fond régulier, l'étude des ondes sur une plage.

La théorie de FRIEDRICHS utilise aussi l'hypothèse d'un rotationnel nul. Or, on peut se demander si cette hypothèse est toujours valable en faible profondeur lorsque l'on tient compte du frottement, car on peut penser que le frottement sur le fond va créer des tourbillons.

GERMAIN [1963, 1964, 1966, 1967] a présenté une méthode rigoureuse pour l'étude des ondes longues. Il introduit une distorsion de l'échelle horizontale et utilise une méthode de perturbation pour obtenir les solutions de la houle en eau peu profonde. La formulation faite par GERMAIN a un avantage sur celle faite par LITTMAN : elle permet d'obtenir l'onde solitaire comme cas limite de la houle en eau peu profonde. GERMAIN a aussi étudié dans le plan de LITTMAN — que nous verrons par la suite — le domaine commun aux houles longues et aux houles courtes (Houles de GOUYON et STRUIK).

La formulation faite par SERRE présente un intérêt, car elle permet la prise en compte de la pente du fond et du frottement. Lorsque l'on néglige la pente du fond et qu'on suppose le fluide parfait, on peut intégrer les équations de SERRE pour obtenir une solution également cnoïdale.

La méthode de SERRE diffère des autres théories des ondes longues par le fait même que l'on ferme le problème en se donnant non pas le rotationnel, mais la distribution des vitesses horizontales (SERRE fait l'hypothèse d'une répartition uniforme des vitesses horizontales dans une section). Or, en se donnant la loi des vitesses horizontales, l'équation de continuité

et les conditions d'imperméabilité du fond et de la surface libre permettent de déterminer la distribution des vitesses verticales. On détermine ainsi complètement le champ des vitesses. Mais, lorsqu'on se donne les vitesses, on doit encore vérifier une équation que l'on obtient en prenant le rotationnel des équations dynamiques

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \left(\frac{\overrightarrow{DV}}{Dt}\right) = 0$$

et qui est la condition de SCHWARZ. Cette équation nous donne, pour un écoulement plan (invariant suivant Oy) :

$$\frac{D}{Dt} \left(\overrightarrow{\text{Rot}}\ \overrightarrow{V}\right) = 0$$

et exprime alors la conservation du rotationnel sur une trajectoire. L'hypothèse de SERRE ne permet pas de vérifier la condition de SCHWARZ, et sa méthode n'est pas rigoureuse.

Toutefois, la distribution des vitesses horizontales prise par SERRE est physiquement tout à fait acceptable. En comparant cette distribution à celles données par la solution de KORTEWEG et DE VRIES - KELLER (distribution également uniforme), on conclut qu'en première approximation l'hypothèse de SERRE est justifiée. Dans le cas limite de la théorie cnoïdale, c'est-à-dire l'onde solitaire, l'hypothèse de SERRE est toujours vérifiée dans une section verticale située assez loin de la crête de l'onde, puisque l'écoulement y est uniforme.

Les équations de SERRE ont été intégrées numériquement par DAUBERT et MARVAUD [1965] pour l'étude d'un problème non périodique : l'étude des ondes de FAVRE, et CAUDRON [1968] a montré que les résultats numériques de ces auteurs permettaient de retrouver avec une très bonne approximation les courbes expérimentales qu'il a obtenues.

3 - BUTS DE L'ETUDE

Cette étude a pour but de présenter une méthode variationnelle et une méthode numérique pour le calcul des approximations des ondes longues avec courbure.

...

Les méthodes du calcul variationnel sont d'un usage courant dans presque toutes les branches de la physique, et il est curieux de constater — comme l'a fait VON NEWMANN (1945) — que les hydrodynamiciens ne les aient presque pas utilisées. Les premiers travaux sur ce sujet sont ceux de LICHTENSTEIN (1929), ECKART (1938) et TAUB (1949), qui essayèrent d'obtenir les équations dynamiques en variables d'EULER par une méthode variationnelle. HERIVEL (1954) a réussi à faire cette formulation en utilisant le principe de HAMILTON - OSTROGRADSKI et en incluant les conditions de conservation du volume et de l'entropie par des multiplicateurs de LAGRANGE. Cette formulation des équations dynamiques n'est malheureusement pas satisfaisante pour l'étude des ondes de gravité en faible profondeur, car elle a recours à des considérations d'ordre thermodynamique.

WHITHAM (1965, 1966, 1967) et LUKE (1966, 1967) essayèrent aussi de faire cette formulation en variables d'EULER. WHITHAM a montré que pour les écoulements irrotationnels on pouvait étudier les ondes longues en variables d'EULER. En prenant comme Lagrangien l'équation de BERNOULLI et en utilisant la méthode de RITZ - KANTOROVICH, WHITHAM a pu obtenir en première approximation des équations de BOUSSINESQ.

Lorsqu'on utilise une méthode variationnelle pour l'étude des écoulements à surface libre, la prise en compte des conditions aux limites à la surface libre qui est inconnue a priori pose des difficultés [WHITHAM (1967)]. Il est évident que ces conditions s'introduisent plus facilement lorsque l'on traite le problème en variables de LAGRANGE, car il suffit d'écrire qu'une particule se trouvant à la surface libre à l'instant initial reste toujours sur cette surface libre. A la suite des travaux de WHITHAM, DAUBERT (1967) proposa de faire la formulation du problème en variables de LAGRANGE par une méthode variationnelle, en utilisant le principe d' HAMILTON - OSTROGRADSKI.

Nous avons obtenu par cette méthode la forme intégrale des équations dynamiques et nous présenterons dans cette étude une méthode variationnelle — qui est une variante de la méthode de RITZ due à KANTOROVICH — pour résoudre le problème. Avec cette méthode, on introduit les conditions qui caractérisent l'écoulement au niveau des séries utilisées pour l'approximation des variables.

La formulation variationnelle ne convient plus lorsque l'on tient compte du frottement, car alors l'écoulement n'est plus conservatif et on ne peut plus utiliser le principe d' HAMILTON - OSTROGRADSKI. Pour pouvoir introduire le frottement, nous proposerons ici une méthode de résolution qui est la méthode de GALERKIN. Cette méthode utilise les équations dynamiques sous leur forme différentielle. En utilisant les mêmes séries que celles utilisées avec la méthode de RITZ - KANTOROVICH pour l'approximation des variables, nous allons montrer que dans le cas d'un écoulement conservatif ces deux méthodes donnent le même résultat.

La première partie de l'étude sera consacrée à la formulation des équations des ondes longues. Après avoir fait la formulation des équations de l'hydrodynamique en variables de LAGRANGE, nous présenterons les deux méthodes envisagées pour la recherche des approximations des ondes longues avec courbure. Nous utiliserons ces méthodes pour calculer les équations des deux premières approximations de ces ondes et nous montrerons que la première approximation est identique aux équations de SERRE. Ensuite, nous indiquerons la façon dont on peut prendre en compte le frottement et la pente du fond dans les approximations des ondes longues avec courbure. Nous terminerons cette première partie en présentant une méthode d'approximation de ces ondes en variables d'EULER.

Nous étudierons dans la deuxième partie de cette étude les propriétés mécaniques de ces ondes et nous préciserons la façon dont elles se propagent. En étudiant les caractéristiques des équations de la première approximation, nous verrons que le système formé par ces équations n'est pas totalement hyperbolique et qu'il présente un caractère de parabolicité lié à l'existence des caractéristiques doubles, mais nous verrons que le caractère de parabolicité provient surtout des termes d'ordre le moins élevé dans ces équations et que ces termes jouent un rôle prépondérant dans la propagation des ondes longues avec courbure. En ne conservant que ces termes, les équations de ces ondes se réduisent aux équations de BARRE de SAINT-VENANT. Nous appellerons les caractéristiques des équations ainsi obtenues les pseudo-caractéristiques des équations des ondes longues avec courbure. Nous calculerons aussi les équations du choc dans cette partie de l'étude.

...

Les équations des ondes longues avec courbure permettent l'étude des ondes progressives et nous obtiendrons dans la troisième partie une solution périodique qui est la solution de première approximation de la houle cnoïdale. Cette troisième partie sera consacrée à l'étude de la houle en eau peu profonde. Nous calculerons la solution complète de la houle en première approximation et nous la comparerons numériquement aux autres solutions connues de la houle en faible profondeur. Cette étude comparative nous a permis de préciser les domaines où les solutions de la houle cnoïdale de deuxième approximation (LAITONE) et de la houle de STOKES de troisième approximation en profondeur finie sont à utiliser. Nous avons précisé les limites physiques et mathématiques de ces solutions dans un but pratique qui est de permettre aux ingénieurs du génie maritime de choisir, parmi les solutions de la houle les plus généralement employées, celle qui est utilisable pour l'étude d'une houle de caractéristiques données. Il n'a malheureusement pas été possible de comparer les solutions que nous avons étudiées à des résultats expérimentaux.

On rencontre fréquemment en génie hydraulique des problèmes d'ondes de gravité en eau peu profonde pour lesquels on ne peut pas se libérer du temps dans les équations des ondes longues avec courbure. Ces problèmes sont ceux des phénomènes non périodiques dans le temps. Pour l'étude de ces problèmes on doit toujours avoir recours au calcul numérique. Dans la dernière partie de ce mémoire, nous présenterons une méthode numérique d'intégration des équations des ondes longues avec courbure. Cette méthode utilise un schéma numérique implicite qui est consistant, convergent et stable. Nous avons fait l'étude de la stabilité en utilisant le critère de VON NEWMANN. Nous avons présenté dans ce chapitre une méthode de résolution des équations au choc et la façon de propager les chocs.

PREMIERE PARTIE

FORMULATION DES EQUATIONS DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE

CHAPITRE I

FORMULATION VARIATIONNELLE DES EQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE.

1 - FORMULATION VARIATIONNELLE DES EQUATIONS DYNAMIQUES.

Nous allons établir les équations du mouvement d'un liquide parfait pesant dans un canal à fond horizontal infiniment long et large et dont la profondeur au repos est h. Nous utiliserons pour cela les variables de LAGRANGE.

Dans le repère orthonormé direct Oxyz - Oz étant orienté verticalement et le plan Oxy étant confondu avec le fond - nous considèrerons le domaine D occupé par le fluide à l'instant initial.

$$D = \left[-\infty, \infty\right] \left[-\infty, \infty\right] \left[0, h\right]$$

Au temps t , la particule qui était à l'instant initial t_o en M_o (a, b, c), sera repérée par ses coordonnées :

$$x = x\ (a, b, c, t)$$
$$y = y\ (a, b, c, t)$$
$$z = z\ (a, b, c, t)$$

La conservation du volume impose alors :

$$\frac{D\ (x, y, z)}{D\ (a, b, c)} = 1$$

Considérons maintenant le potentiel cinétique :

$$L\ (a, b, c, t) = K\ (a, b, c, t) - P\ (a, b, c, t)$$

où K et P représentent respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$K = \frac{1}{2} \rho \, (x_t^2 + y_t^2 + z_t^2)$$

et $P = \rho g z$

ρ étant la masse volumique.

Nous avons :

$$L\,(a, b, c, t) = \frac{1}{2} \rho \, (x_t^2 + y_t^2 + z_t^2) - \rho g z$$

Nous minimisons ce potentiel cinétique dans tout le domaine D occupé par le fluide, sous la contrainte imposée par l'équation de continuité. Nous utiliserons un multiplicateur de LAGRANGE $\lambda\,(a, b, c, t)$ pour inclure la condition de conservation du volume dans la fonctionnelle L. Nous obtenons alors le Lagrangien :

$$L\,(a, b, c, t) = \frac{1}{2} \rho \, (x_t^2 + y_t^2 + z_t^2) - \rho g z + \lambda \left[\frac{D\,(x,y,z)}{D\,(a,b,c)} - 1\right]$$

Nous aurons donc, dans tout le domaine fluide :

$$I = \int_a \int_b \int_c \int_t L\,(a, b, c, t)\, da\, db\, dc\, dt \qquad (1.1)$$

En vertu du principe d'HAMILTON-OSTROGRADSKI, qui implique les principes fondamentaux de la dynamique, l'action I au sens d'HAMILTON aura une valeur stationnaire sur la trajectoire si :

$$\delta I = 0 \qquad (1.2)$$

Pour résoudre le problème variationnel ainsi posé, il faut se donner des conditions aux limites qui caractérisent l'écoulement que l'on veut étudier et ferment le problème. En particulier, il nous faut expri-

mer une condition aux limites sur λ et pour pouvoir le faire il faut chercher ce que représente physiquement cette fonction. Nous verrons par la suite comment prendre ces conditions aux limites.

Annulons la variation de I, nous obtenons alors les équations d'EUL du problème variationnel :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x_t}\right) + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial L}{\partial x_a}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial L}{\partial x_b}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{L}{x_c}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial y_t}\right) + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial L}{\partial y_a}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial L}{\partial y_b}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial L}{\partial y_c}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial z_t}\right) + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial L}{\partial z_a}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial L}{\partial z_b}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial L}{\partial z_c}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0
\end{aligned}\right\}$$

soit :

$$\left.\begin{aligned}
&\rho x_{tt} + \left[\lambda \frac{D(y,z)}{D(b,c)}\right]_a - \left[\lambda \frac{D(y,z)}{D(a,c)}\right]_b + \left[\lambda \frac{D(y,z)}{D(a,b)}\right]_c = 0 \\
&\rho y_{tt} - \left[\lambda \frac{D(x,z)}{D(b,c)}\right]_a + \left[\lambda \frac{D(x,z)}{D(a,c)}\right]_b - \left[\lambda \frac{D(x,z)}{D(a,b)}\right]_c = 0 \\
&\rho z_{tt} + \left[\lambda \frac{D(x,y)}{D(b,c)}\right]_a - \left[\lambda \frac{D(x,y)}{D(a,c)}\right]_b + \left[\lambda \frac{D(x,y)}{D(a,b)}\right]_c + \rho g = 0 \\
&\frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} = 1
\end{aligned}\right\}$$

Nous allons montrer que λ représente la pression à une fonction du temps près.

Le système (1.3) peut se mettre sous la forme :

$$\rho x_{tt} + \frac{D(\lambda,y,z)}{D(a,b,c)} = 0 \qquad (1.4.1)$$

$$\rho y_{tt} + \frac{D(x,\lambda,z)}{D(a,b,c)} = 0 \qquad (1.4.2)$$

$$\rho z_{tt} + \frac{D(x,y,\lambda)}{D(a,b,c)} + \rho g = 0 \qquad (1.4.3)$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} = 1 \qquad (1.4.4)$$

ou encore sous la forme équivalente

$$\left.\begin{aligned} \lambda_a &= -\rho x_{tt} x_a - \rho y_{tt} y_a - \rho(z_{tt} + g) z_a \\ \lambda_b &= -\rho x_{tt} x_b - \rho y_{tt} y_b - \rho(z_{tt} + g) z_b \\ \lambda_c &= -\rho x_{tt} x_c - \rho y_{tt} y_c - \rho(z_{tt} + g) z_c \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} = 1$$

En appelant $\vec{M}$ le vecteur de composantes (x,y,z) et $\vec{F}$ le vecteur de composantes (o,o,g), les trois premières équations de (1.5) se mettent sous la forme

$$\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}\ \lambda + (\vec{F} + \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial t^2}) \overline{\overline{\text{grad}}}\ \vec{M} = 0 \ \ldots\ldots \qquad (1.6)$$

En comparant l'équation (1.6) où l'équation dynamique classique exprimée en variables de LAGRANGE,

$$\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}\ p + (\vec{F} + \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial t^2}) \overline{\overline{\text{grad}}}\ \vec{M} = 0$$

où p (a, b, c, t) désigne la pression, nous constatons que :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ \lambda = \overrightarrow{\text{grad}}\ p$$

$$\text{donc } \lambda = p + f(t)$$

Lorsque nous utiliserons l'équation (1.2) ou le système (1.4) pour l'étude des ondes de gravité, nous aurons à exprimer une condition aux limites sur λ qui sera la condition dynamique de surface libre.

D'autre part, nous remarquerons qu'en éliminant λ des équations (1.4) nous obtiendrons :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{D(x_{tt}, x)}{D(b,c)} + \frac{D(y_{tt}, y)}{D(b,c)} + \frac{D(z_{tt}, z)}{D(b,c)} = 0 \\
&\frac{D(x_{tt}, x)}{D(a,c)} + \frac{D(y_{tt}, y)}{D(a,c)} + \frac{D(z_{tt}, z)}{D(a,c)} = 0 \\
&\frac{D(x_{tt}, x)}{D(a,b)} + \frac{D(y_{tt}, y)}{D(a,b)} + \frac{D(z_{tt}, z)}{D(a,b)} = 0
\end{aligned}\right\}$$

qui s'écrit aussi :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{D(x_t, x)}{D(b,c)} + \frac{D(y_t, y)}{D(b,c)} + \frac{D(z_t, z)}{D(b,c)}\right] = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{D(x_t, x)}{D(a,c)} + \frac{D(y_t, y)}{D(a,c)} + \frac{D(z_t, z)}{D(a,c)}\right] = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{D(x_t, x)}{D(a,b)} + \frac{D(y_t, y)}{D(a,c)} + \frac{D(z_t, z)}{D(a,b)}\right] = 0
\end{aligned}\right\}$$

Nous intégrerons une fois ces équations par rapport au temps pour avoir :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{D(x_t, x)}{D(b,c)} + \frac{D(y_t, y)}{D(b,c)} + \frac{D(z_t, z)}{D(b,c)} = 2\nu(a,b,c) \\
&\frac{D(x_t, x)}{D(a,c)} + \frac{D(y_t, y)}{D(a,c)} + \frac{D(z_t, z)}{D(a,c)} = 2\omega(a,b,c) \\
&\frac{D(x_t, x)}{D(a,b)} + \frac{D(y_t, y)}{D(a,b)} + \frac{D(z_t, z)}{D(a,b)} = 2\mu(a,b,c)
\end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

$\nu(a,b,c)$, $\omega(a,b,c)$ et $\mu(a,b,c)$ qui sont des fonctions indépendantes du temps, représentent les composantes du vecteur tourbillon.

Pour pouvoir résoudre le problème, il faudra nous donner une distribution des tourbillons. Si nous traitons un problème aux conditions initiales,

cette distribution sera implicitement donnée avec les conditions initiales. Si, par contre, nous traitons un problème périodique, nous devrons nous donner la distribution des tourbillons en même temps que la condition de périodicité et considérer les variables a,b,c et t comme des variables de MICHE.

2 - LES CONDITIONS AUX LIMITES ET L'APPROXIMATION DES ONDES EN EAU PEU PROFONDE.

La côte d'une particule nous sera donnée par z (a,b,c,t). A l'instant initial t_o nous aurons :

$$z = c$$

Les ondes en faible profondeur appartiennent à la catégorie des écoulements presque horizontaux et sont caractérisées par une faible variation de la cote z d'une particule autour de sa valeur initiale c. Nous développerons donc toutes les variables sur la base des polynomes en $(\frac{c}{h})$ où h est le tirant d'eau au repos ou tirant d'eau moyen.

Nous poserons :

$$\left.\begin{aligned} x\,(a,b,c,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} X_i\,(a,b,t)\;\phi_i\,(c) \\ y\,(a,b,c,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} Y_i\,(a,b,t)\;\phi_i\,(c) \\ z\,(a,b,c,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} Z_i\,(a,b,t)\;\psi_i\,(c) \\ \text{et } \lambda\,(a,b,c,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\,(a,b,t)\;\zeta_i\,(c) \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

Nous prendrons ϕ_i sous la forme

$$\phi_i = (\frac{c}{h})^{i-1}$$

Pour la variable z nous aurons à choisir un développement qui respecte la condition d'imperméabilité du fond. Comme nous avons supposé le fond horizontal nous prendrons :

$$\psi_i = \left(\frac{c}{h}\right)^i$$

Alors la surface libre sera donnée par l'équation :

$$\eta(a,b,t) = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i\,(a,b,t) \qquad (1.9)$$

car une particule qui se trouve sur la surface libre (c=h) y restera tout le temps.

A la surface libre nous aurons à exprimer une condition sur λ. Cette surface libre est une isobare correspondant à la pression atmosphérique et cette condition s'exprime par :

$$\lambda(a,b,h,t) = 0$$

où λ est la pression relative à la pression atmosphérique. Cette condition dynamique de surface libre sera respectée si nous prenons :

$$\zeta_i = \left(1 - \frac{c}{h}\right)^i$$

Avec ces développements nous avons pris en compte toutes les conditions aux limites du problème. Nous utiliserons ces développements pour rechercher les approximations des ondes longues.

CHAPITRE II

LES METHODES D'APPROXIMATION DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE.

Nous avons envisagé deux méthodes pour résoudre le problème posé au chapitre précédent. La première est une méthode variationnelle qui est une variante de la méthode de RITZ proposée par KANTOROVICH. Avec cette méthode, nous substituerons les développements (1.8) dans l'équation (1.1) qui sera intégrée par rapport à la variable c pour se ramener à un problème variationnel à une dimension de moins. Ensuite, nous prendrons les équations d'EULER de ce problème variationnel que nous résoudrons. Cette méthode convient très bien aux écoulements conservatifs mais devient inutilisable lorsque l'on tient compte du frottement, car alors on ne peut plus utiliser le principe de HAMILTON-OSTROGRADSKI.

Pour tenir compte du frottement, nous utiliserons une méthode numérique qui est la méthode de GALERKIN. Nous substituerons alors les développements (1.8) dans les équations (1.4) et nous orthogonaliserons le système ainsi obtenu. Après avoir projeté le système sur la base des polynomes en (c/h), nous aurons un système ayant une dimension de moins que nous résoudrons pour obtenir les approximations des ondes longues avec courbure. Dans le cas où l'on ne tient pas compte du frottement, nous allons montrer que les solutions obtenues par cette méthode sont identiques à celles obtenues par la méthode de RITZ-KANTOROVICH quel que soit l'onde d'approximation.

1 - APPROXIMATION DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE PAR LA METHODE DE RITZ-KANTOROVICH.

Nous utiliserons la forme intégrale des équations dynamiques pour rechercher les approximations des ondes longues.

$$I = \int_a \int_b \int_c \int_t \left\{ \frac{1}{2} \rho \left(x_t^2 + y_t^2 + z_t^2 \right) - \rho g z + \lambda \left[\frac{D(x,y,z)}{D(a,b,c)} - 1 \right] \right\} da\, db\, dc\, dt \qquad (2.1)$$

Les développements (1.8) introduits au chapitre précédent nous donnent, à l'ordre n d'approximation

$$\left.\begin{aligned} x(a,b,c,t) &= \sum_{i=1}^{n} X_i(a,b,t)\ \phi_i(c) \\ y(a,b,c,t) &= \sum_{i=1}^{n} Y_i(a,b,t)\ \phi_i(c) \\ z(a,b,c,t) &= \sum_{i=1}^{n} Z_i(a,b,t)\ \psi_i(c) \\ \lambda(a,b,c,t) &= \sum \Lambda_i(a,b,t)\ \zeta_i(c) \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

avec $\phi_i = \left(\frac{c}{h}\right)^{i-1}$

$\psi_i = \left(\frac{c}{h}\right)^{i}$

et $\zeta_i = \left(1 - \frac{c}{h}\right)^{i}$

En portant ces développements dans l'équation (2.1) nous trouvons :

$$I = \int_a \int_b \int_c \int_t \left\{ \frac{1}{2}\rho\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \phi_i X_{it}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i Y_{it}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i Z_{it}\right)^2\right] - \rho g \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i Z_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \Lambda_i\right) \cdot \left[\frac{D\left(\sum_{i=1}^{n} \phi_i X_i, \sum_{i=1}^{n} \phi_i Y_i, \sum_{i=1}^{n} \psi_i Z_i\right) - 1}{D(a,b,c)}\right]\right\} da\, db\, dc\, dt$$

Avant de prendre la variation de I nous allons intégrer une fois par rapport à c entre le fond (c=0) et la surface libre (c=h); nous aurons alors :

$$I = \int_a \int_b \int_t \left\{ \frac{1}{2} \rho \left[\sum_{m,k} X_{mt} X_{kt} \theta_{m,k} + \sum_{r,s} Y_{rt} Y_{st} \theta_{r,s} + \sum_{l,j} Z_{lt} Z_{jt} \gamma_{l,j} \right] \right.$$

$$- \rho g \sum_j Z_j \alpha_j + \sum_{i,j,k,s} \Lambda_i \left[X_k (Y_{sa} Z_{jb} - Y_{sb} Z_{ja}) \mu_{i,j,k,s} \right.$$

$$\left. + Y_s (X_{kb} Z_{ja} - X_{ka} Z_{jb}) \delta_{i,j,k,s} + Z_j (X_{ka} Z_{sb} - Y_{sa} X_{kb}) \beta_{i,j,k,s} \right]$$

$$\left. - \sum_i \Lambda_i \nu_i \right\} da\, db\, dt$$

ou nous avons posé

$$\theta_{m,k} = \int_o^h \phi_m \phi_k \, dc \quad ; \quad \gamma_{l,j} = \int_o^h \psi_l \psi_j \, dc \; ;$$

$$\alpha_j = \int_o^h \psi_j \, dc \quad ; \quad \nu_i = \int_o^h \zeta_i \, dc \; ;$$

$$\mu_{i,j,k,s} = \int_o^h \zeta_i \psi_j \phi'_k \phi_s \, dc \quad ; \quad \delta_{i,j,k,s} = \int_o^h \zeta_i \psi_j \phi_k \phi'_s \, dc$$

$$\text{et} \quad \beta_{i,j,k,s} = \int_o^h \zeta_i \psi'_j \phi_k \phi_s \, dc$$

en notant :

$$\phi' = \frac{d\phi}{dc} \quad \text{et} \quad \psi' = \frac{d\psi}{dc}$$

Ainsi nous nous sommes ramenés à un problème variationnel ayant une dimension de moins.

Annulons la variation de I

$$\delta I = 0$$

Il vient, après uniformisation des indices :

$$\rho \sum_m X_{mtt}\ \theta_{m,l} + \left[\sum_{i,j,s} \Lambda_i\ (Y_{sb}\ Z_j\ \beta_{i,j,l,s} - Y_s\ Z_{jb}\ \delta_{i,j,l,s})\right]\ a$$

$$+ \left[\sum_{i,j,s} \Lambda_i\ (Y_s\ Z_{ja}\ \delta_{i,j,l,s} - Y_{sa}\ Z_j\ \beta_{i,j,l,s}\right]\ b\ -$$

$$\sum_{i,j,s} \Lambda_i\ (Y_{sa}\ Z_{jb} - Y_{sb}\ Z_{ja})\ \mu_{i,j,l,s} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2.3.1.)$$

$$\rho \sum_m Y_{mtt}\ \theta_{m,l} + \left[\sum_{i,j,k} \Lambda_i\ (X_k\ Z_{jb}\ \mu_{i,i,k,l} - X_{kb}\ Z_j\ \beta_{i,j,k,l})\right]\ a$$

$$+ \left[\sum_{i,j,k} \Lambda_i\ (X_{ka}\ Z_j\ \beta_{i,j,k,l} - X_k\ Z_{ia}\ \mu_{i,j,k,l})\right]\ b$$

$$- \sum_{i,j,k} \Lambda_i\ (X_{kb}\ Z_{ja} - X_{ka}\ Z_{jb})\ \delta_{i,j,k,l} = 0 \ \ldots\ (2.3.2)$$

$$\rho \sum_m Z_{mtt}\ \gamma_{m,l} + \left[\sum_{i,k,s} \Lambda_i\ (X_{kb}\ Y_s\ \delta_{i,l,k,s} - X_k\ Y_{sb}\ \mu_{i,l,k,s})\right]\ a$$

$$+ \left[\sum_{i,k,s} \Lambda_i\ (X_k\ Y_{sa}\ \mu_{i,l,k,s} - X_{ka}\ Y_s\ \delta_{i,l,k,s})\right]\ b$$

$$- \sum_{i,k,s} \Lambda_i\ (X_{ka}\ Y_{sb} - X_{kb}\ Y_{sa})\ \beta_{i,l,k,s} + \rho g\ \alpha_l = 0 \ (2.3.3)$$

et

$$\sum_{j,k,s} \left[X_k\ (Y_{sa}\ Z_{jb} - Y_{sb}\ Z_{ja})\ \mu_{l,j,k,s} + Y_s\ (X_{kb}\ Z_{ja} - X_{ka}\ Z_{jb})\ \delta_{l,j,k,s}\right.$$

$$\left. + Z_j\ (X_{ka}\ Y_{sb} - X_{kb}\ Y_{sa})\ \beta_{l,j,k,s} - \nu_l\right] = 0 \ \ldots\ (2.3.4)$$

$$(l = 1,2, \ldots, n)$$

La résolution de ce système de 4 n équations à 4 n inconnues nous donnera la $n^{ième}$ approximation des ondes longues avec courbure. On peut, très facilement, prendre en compte l'hypothèse d'un fond non horizontal dans cette formulation, ce que nous ferons par la suite.

Pour l'instant, nous allons rechercher les approximations des ondes longues avec courbure par la méthode de GALERKIN, en supposant un canal à fond horizontal et un fluide parfait. Nous allons montrer qu'en utilisant les mêmes développements que ceux utilisés plus haut, les résultats obtenus par cette méthode sont identiques à ceux obtenus par la méthode de RITZ-KANTOROVICH.

2 - LES APPROXIMATIONS DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE PAR LA METHODE DE GALERKIN.

Nous utiliserons, cette fois-ci, les équations dynamiques sous leur forme différentielle (1.4) obtenue au chapitre I. En substituant les développements (1.8) dans les équations (1.4) nous trouvons :

$$L_1(a,b,c,t) = \rho \sum_m X_{mtt}\,\phi_m + \sum_{i,j,s}\Big[\Lambda_{ia}\,\zeta_i\,(Y_{sb}\,Z_j\,\phi_s\,\psi'_j - Y_s\,Z_{jb}\,\phi'_s\,\psi_j)$$

$$- \zeta_i\,\Lambda_{ib}\,(Y_{sa}\,Z_j\,\phi_s\,\psi'_j - Y_s\,Z_{ja}\,\phi'_s\,\psi_j) + \zeta'_i\,\Lambda_i\,(Y_{sa}\,Z_{ib} - Y_{sb}\,Z_{ja})\,\phi_s\,\psi_j\Big]$$

$$L_2(a,b,c,t) = \rho \sum_m Y_{mtt}\,\phi_m + \sum_{i,j,k}\Big[\zeta_i\,\Lambda_{ia}\,(X_k\,Z_{jb}\,\phi'_k\,\psi_j - X_{kb}\,Z_j\,\phi_k\,\psi'_j)$$

$$- \zeta_i\,\Lambda_{ib}\,(X_k\,Z_{ja}\,\phi'_k\,\psi_j - X_{ka}\,Z_j\,\phi_k\,\psi'_j) + \zeta'_i\,\Lambda_i\,(X_{kb}\,Z_{ja} - X_{ka}\,Z_{jb})\,\phi_k\,\psi_j\Big]$$

$$L_3(a,b,c,t) = \rho \sum_m Z_{mtt}\,\psi_m + \sum_{i,k,s}\Big[\zeta_i\,\Lambda_{ia}\,(X_{kb}\,Y_s\,\phi_k\,\phi'_s - X_k\,Y_{sb}\,\phi'_k\,\phi_s$$

$$- \zeta_i\,\Lambda_{ib}\,(X_{ka}\,Y_s\,\phi_k\,\phi'_s - X_k\,Y_{sa}\,\phi'_k\,\phi_s + \zeta'_i\,\Lambda_i\,(X_{ka}\,Y_{sb} - X_{kb}\,Y_{sa})\,\phi_k\,\phi_s\Big] + \rho g$$

et

$$L_4\,(a,b,c,t)\sum_{j,k,s}\Big[X_k\,\phi'_k\,(Y_{sa}\,Z_{jb}\,\phi_s\,\psi_j - Y_{sb}\,Z_{ja}\,\phi_s\,\psi_j)$$

$$+\,Y_s\,(X_{kb}\,Z_{ja} - X_{ka}\,Z_{jb})\,\phi_k\,\phi'_{sj}\,\psi + Z_j\,(X_{ka}\,Y_{sb} - X_{kb}\,Y_{sa})\,\phi_k\,\phi_s\,\psi'_j\Big] - 1$$

Nous allons orthogonaliser ce système en faisant :

$$\left.\begin{aligned}
&\int_o^h L_1\,(a,b,c,t)\,\phi_1\,dc = 0\\
&\int_o^h L_2\,(a,b,c,t)\,\phi_1\,dc = 0\\
&\int_o^h L_3\,(a,b,c,t)\,\psi_1\,dc = 0\\
&\int_o^h L_3\,(a,b,c,t)\,\zeta_1\,dc = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (l = 1,2,\ \ldots\ n)$$

· il vient alors, en posant :

$$\xi_{i,j,k,l} = \int_o^h \zeta'_i\,\psi_j\,\phi_k\,\phi_l\,dc$$

$$\rho\sum_m X_{mtt}\,\theta_{m,l} + \sum_{i,j,s}\Big[\Lambda_{ia}\,(Y_{sb}\,Z_j\,\beta_{i,j,l,s} - Y_s\,Z_{jb}\,\delta_{i,j,l,s})$$

$$-\,\Lambda_{ib}\,(Y_{sa}\,Z_j\,\beta_{i,j,l,s} - Y_s\,Z_{ja}\,\delta_{i,j,l,s})$$

$$+\,\Lambda_i\,(Y_{sa}\,Z_{jb} - Y_{sb}\,Z_{ja})\,\xi_{i,j,l,s}\Big] = 0$$

.... (2.4.1)

$$\rho\sum_m Y_{mtt}\,\theta_{m,l} + \sum_{i,j,k}\Big[\Lambda_{ia}\,(X_k\,Z_{jb}\,\mu_{i,j,k,l} - X_{kb}\,Z_j\,\beta_{i,j,k,l})$$

$$-\,\Lambda_{ib}\,(X_k\,Z_{ja}\,\mu_{i,j,k,l} - X_{ka}\,Z_j\,\beta_{i,j,k,l})$$

$$+\,\Lambda_i\,(X_{kb}\,Z_{ja} - X_{ka}\,Z_{jb})\,\xi_{i,j,k,l}\Big] = 0$$

.... (2.4.2)

$$\rho \sum_m Z_{mtt}\ \gamma_{m,l} + \sum_{i,k,s} \Big[\Lambda_{ia}\,(X_{kb}\,Y_s\,\delta_{i,l,k,s} - X_k\,Y_{sb}\,\mu_{i,l,k,s}) -$$

$$\Lambda_{ib}\,(X_{ka}\,Y_s\,\delta_{i,l,k,s} - X_k\,Y_{sa}\,\mu_{i,l,k,s}) + \Lambda_i\,(X_{ka}\,Y_{sb} - X_{kb}\,Y_{sa})\,\xi_{i,l,k,s}\Big]$$

$$+ \rho g\ \alpha_l = 0 \qquad (2.4.3)$$

et

$$\sum_{j,k,s} \Big[X_k\,(Y_{sa}\,Z_{jb} - Y_{sb}\,Z_{ja})\,\mu_{l,j,k,s} + Y_s\,(X_{kb}\,Z_{ja} - X_{ka}\,Z_{jb})\,\delta_{l,j,k,s}$$

$$+ Z_j\,(X_{ka}\,Y_{sb} - X_{kb}\,Y_{sa})\,\beta_{l,j,k,s}\Big] + \nu_l = 0 \ldots. \qquad (2.4.4)$$

$$(l = 1,2, \ldots, n)$$

En résolvant le système (2.4) qui est un système de 4 n équations à 4 n inconnues, nous obtiendrons la $n^{ième}$ approximation des ondes longues avec courbure.

3 - COMPARAISON DES SOLUTIONS.

Nous allons maintenant comparer le système (2.4) obtenu par la méthode de GALERKIN au système (2.3) obtenu par la méthode de RITZ-KANTOROVICH, et montrer que ces deux systèmes sont identiques. Pour cela nous mettrons les équations (2.3) sous la forme ci-dessous :

$$\rho \sum_m X_{mtt}\ \theta_{m,l} + \sum_{i,j,s} \Big[\Lambda_{ia}\,(Y_{sb}\,Z_j\,\beta_{i,j,l,s} - Y_s\,Z_{jb}\,\delta_{i,j,l,s}) -$$

$$\Lambda_{ib}\,(Y_{sa}\,Z_j\,\beta_{i,j,l,s} - Y_s\,Z_{ja}\,\delta_{i,j,l,s}) - \Lambda_i\,(Y_{sa}\,Z_{jb} - Y_{sb}\,Z_{ja})$$

$$(\beta_{i,j,l,s} + \delta_{i,j,l,s} + \mu_{i,j,l,s})\Big] = 0 \ldots\ldots \qquad (2.5.1)$$

$$\rho \sum_m Y_{mtt}\ \theta_{m,l} + \sum_{i,j,k} \Big[\Lambda_{ia}\,(X_k\,Z_{jb}\,\mu_{i,j,k,l} - X_{kb}\,Z_j\,\beta_{i,j,k,l}) -$$

$$_{ib}\,(X_k\,Z_{ja}\,\mu_{i,j,k,l} - X_{ka}\,Z_j\,\beta_{i,j,k,l}) - \Lambda_i\,(X_{kb}\,Z_{ja} - X_{ka}\,Z_{jb})$$

$$\left(\beta_{i,j,k,l} + \delta_{i,j,k,l} + \mu_{i,j,k,l} \right) \Big] = 0 \ldots\ldots\ldots (2.5.2)$$

$$\rho \sum_{m} Z_{mtt}\, \gamma_{m,l} + \sum_{i,k,s} \Big[\Lambda_{ia} \left(X_{kb}\, Y_{s}\, \delta_{i,l,k,s} - X_{k}\, Y_{sb}\, \mu_{i,l,k,s} \right) -$$

$$\Lambda_{ib} \left(X_{ka}\, Y_{s}\, \delta_{i,l,k,s} - X_{k}\, Y_{sa}\, \mu_{i,l,k,s} \right) - \Lambda_{i} \left(X_{ka}\, Y_{sb} - X_{kb}\, Y_{sa} \right)$$

$$\left(\beta_{i,l,k,s} + \delta_{i,l,k,s} + \mu_{i,l,k,s} \right) \Big] + \rho g\, \alpha_{l} = 0 \ldots\ldots (2.5.3)$$

$$\sum_{j,k,s} \Big[X_{k} \left(Y_{sa}\, Z_{jb} - Y_{sb}\, Zja \right) \mu_{l,j,k,s} + Y_{s} \left(X_{kb}\, Z_{ja} - Xka\, Z_{jb} \right) \delta_{l,j,k,s}$$

$$+ Z_{j} \left(X_{ka}\, Y_{sb} - X_{kb}\, Y_{sa} \right) \beta_{l,j,k,s} \Big] - \nu_{l} = 0 \ldots\ldots \quad (2.5.4)$$

$$(l = 1, 2, \ldots., n)$$

En comparant les équations (2.5) aux équations (2.4) on s'aperçoit que les deux systèmes seront identiques si :

$$\beta_{i,j,k,s} + \delta_{i,j,k,s} + \mu_{i,j,k,s} = -\xi_{i,j,k,s} \ldots\ldots \qquad (2.6)$$

Mais

$$\beta_{i,j,k,s} + \delta_{i,j,k,s} + \mu_{i,j,k,s} + \xi_{i,j,k,s} = \int_{o}^{h} \left[\frac{d}{dc} \left(\phi_{k} \phi_{s} \psi_{j} \zeta_{i} \right) \right] dc$$

$$\ldots (2.7)$$

Pour établir l'identité des systèmes (2.4) et (2.5) il nous suffit de montrer que le second membre de (2.7) est nul.

Nous avions posé

$$\phi_{k} = \left(\frac{c}{h} \right)^{k-1} \quad ; \quad \psi_{s} = \left(\frac{c}{h} \right)^{s-1}$$

$$\psi_{j} = \left(\frac{c}{h} \right)^{j} \quad \text{et} \quad \zeta_{i} = \left(1 - \frac{c}{h} \right)^{i}$$

il vient donc :

$$\int_o^h \left[\frac{d}{dc}\left(\phi_k\ \phi_s\ \psi_j\ \zeta_i\right)\right]\ dc = \left[\left(1-\frac{c}{h}\right)^i\ c^{j+k+s-2}\right]_{c=h} - \left[\left(1-\frac{c}{h}\right)^i\ c^{j/k/s-2}\right]_{c=0}$$

Le second membre de cette équation est nul; la relation (2.6) est donc établie ce qui démontre du même coup l'identité des systèmes obtenus par les méthodes de RITZ-KANTOROVICH et de GALERKIN, avec les développements choisis pour l'approximation des fonctions x, y, z et λ .

CHAPITRE III

THEORIE DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE EN PREMIERE ET EN DEUXIEME APPROXIMATIONS

Nous calculerons les deux premières approximations des ondes longues avec courbure en utilisant les méthodes exposées au chapitre précédent. Nous comparerons les équations de la première approximation aux équations de SERRE et nous verrons que ces équations sont identiques.

1 - CALCUL DES DEUX PREMIERES APPROXIMATIONS DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE.

Nous calculerons les deux premières approximations des ondes longues avec courbure par la méthode de GALERKIN; nous utiliserons donc la forme différentielle (1.4) des équations dynamiques pour rechercher ces approximations :

$$\left.\begin{aligned} \rho x_{tt} + \frac{D(\lambda, y, z)}{D(a, b, c)} &= o \\ \rho y_{tt} + \frac{D(x, \lambda, z)}{D(a, b, c)} &= o \\ \rho z_{tt} + \frac{D(x, y, \lambda)}{D(a, b, c)} + \rho g &= o \\ \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Les développements (1.8), qui tiennent compte de toutes les conditions aux limites du problème s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} x(a,b,c,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} X_i(a,b,t)\left(\frac{c}{h}\right)^{i-1} \\ y(a,b,c,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(a,b,t)\left(\frac{c}{h}\right)^{i-1} \\ z(a,b,c,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(a,b,t)\left(\frac{c}{h}\right)^{i} \\ \text{et}\quad \lambda(a,b,c,t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i(a,b,t)\left(1-\frac{c}{h}\right)^{i} \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

Pour calculer les approximations des ondes longues avec courbure nous subtituerons les valeurs de x, y, z, et λ données à chaque ordre d'approximation par (3.2) dans (3.1) et nous orthogonaliserons le système ainsi obtenu.

1.1 - Calcul de la première approximation.

Les développements (3.2) nous donnent, en première approximation :

$$\left.\begin{aligned} x(a,b,c,t) &= X_1(a,b,t)\,\phi_1(c) \\ y(a,b,c,t) &= Y_1(a,b,t)\,\phi_1(c) \\ z(a,b,c,t) &= Z_1(a,b,t)\,\psi_1(c) \\ \text{et}\quad \lambda(a,b,c,t) &= \Lambda_1(a,b,t)\,\zeta_1(c) \end{aligned}\right\}$$

avec $\phi_1 = 1$; $\psi_1 = \frac{c}{h}$ et $\zeta_1 = \left(1-\frac{c}{h}\right)$

Substituons ces valeurs dans (3.1). Il vient :

$$L_1(a,b,c,t) = \rho X_{1tt} + \frac{1}{h}\left(1-\frac{c}{h}\right) Z_1 \frac{D(\Lambda_1 Y_1)}{D(a,b)} - \frac{c}{h^2}\Lambda_1 \frac{D(Y_1,Z_1)}{D(a,b)} = o$$

$$L_2(a,b,c,t) = \rho Y_{1tt} + \frac{c}{h^2}\Lambda_1 \frac{D(X_1,Z_1)}{D(a,b)} + \frac{1}{h}\left(1-\frac{c}{h}\right)\frac{D(X_1,\Lambda_1)}{D(a,b)} = o$$

$$L_3(a,b,c,t) = \rho \frac{c}{h} Z_{1tt} - \frac{1}{h}\Lambda_1 \frac{D(X_1,Y_1)}{D(a,b)} + \rho g = o$$

$$L_4 (a,b,c,t) = \frac{1}{h} Z_1 \frac{D (X_1, Y_1)}{D (a, b)} - 1 = o$$

Nous orthogonaliserons ce système en faisant :

$$\left.\begin{aligned}
&\int_o^h L_1 (a,b,c,t)\ \phi_1 (c)\ dc = o \\
&\int_o^h L_2 (a,b,c,t)\ \phi_1 (c)\ dc = o \\
&\int_o^h L_3 (a,b,c,t)\ \psi_1 (c)\ dc = o \\
&\int_o^h L_4 (a,b,c,t)\ \zeta_1 (c)\ dc = o
\end{aligned}\right\}$$

Il vient :

$$\rho h X_{1tt} + \frac{1}{2} Z_1 \frac{D (\Lambda_1, Y_1)}{D (a,b)} - \frac{1}{2} \Lambda_1 \frac{D (Y_1, Z_1)}{D (a,b)} = o \quad \ldots\ldots\ldots (3.3.1)$$

$$\rho h Y_{1tt} + \frac{1}{2} \Lambda \frac{D (X_1, Z_1)}{D (a,b)} + \frac{1}{2} Z_1 \frac{D (X_1, \Lambda_1)}{D (a,b)} = o \quad \ldots\ldots\ldots (3.3.2)$$

$$\rho h Z_{1tt} - \frac{1}{2} \Lambda_1 \frac{D (X_1, Y_1)}{D (a,b)} + \frac{1}{2} \rho g h = o \quad \ldots\ldots\ldots (3.3.3)$$

$$\frac{1}{h} Z_1 \frac{D (X_1, Y_1)}{D (a, b)} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (3.3.4)$$

L'équation (3.3.3), compte tenu de (3.3.4) nous donne :

$$\Lambda_1 = 2 \rho Z_1 \left(\frac{1}{3} Z_{1tt} + \frac{1}{2} g \right)$$

et en substituant cette valeur dans (3.3.1) et (3.3.2) nous trouvons :

$$\left.\begin{aligned} \rho h\, X_{1tt} + \frac{D\left(Z_1^{\,2}\left(\frac{1}{2}g + \frac{1}{3}Z_{1tt}\right), Y_1\right)}{D(a,b)} &= o \\ \rho h\, Y_{1tt} + \frac{D\left(X_1, Z_1^{\,2}\left(\frac{1}{2}g + \frac{1}{3}Z_{1tt}\right)\right)}{D(a,b)} &= o \\ Z_1 \frac{D(X_1, Y_1)}{D(a,b)} &= h \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

En remarquant que la surface libre est définie par :

$$\eta(a, b, t) = z(a, b, h, t)$$

en 1ère approximation nous aurons donc :

$$\eta(a, b, t) = Z_1(a, b, t)$$

et, à cet ordre d'approximation nous avons aussi

$$x = X_1(a, b, t)$$

et $$y = Y_1(a, b, t)$$

Les équations (3.4) nous donnent alors :

$$\left.\begin{aligned} h\, x_{tt} + \frac{D\left(\eta^2\left(\frac{1}{2}g + \frac{1}{3}\eta_{tt}\right), y\right)}{D(a,b)} &= o \\ h\, y_{tt} + \frac{D\left(x, \eta^2\left(\frac{1}{2}g + \frac{1}{3}\eta_{tt}\right)\right)}{D(a,b)} &= o \\ \eta \frac{D(x, y)}{D(a,b)} &= h \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

qui constituent les équations de la première approximation des ondes longues avec courbure dans un canal à fond horizontal et en l'absence de frottement. Pour traiter un problème aux conditions initiales nous aurons à intégrer numériquement ces équations ; par contre si l'on veut étudier un écoulement périodique nous pourrons intégrer analytiquement les équations du système (3.5) et nous le ferons par la suite.

1.2 - Calcul de la deuxième approximation.

En deuxième approximation nous nous limiterons à l'étude d'un problème plan, c'est-à-dire invariant dans une translation d'axe Oy . Nous prendrons alors les développements suivants :

$$x(a, c, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(a, t) \left(\frac{c}{h}\right)^{i-1}$$

$$z(a, c, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(a,t) \left(\frac{c}{h}\right)^{i}$$

$$\lambda(a, c, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i(a, t) \left(1 - \frac{c}{h}\right)^{i}$$

qui nous donnent, en deuxième approximation

$$\left.\begin{aligned} x(a, c, t) &= X_1(a,t)\, \phi_1(c) + X_2(a,t)\, \phi_2(c) \\ z(a, c, t) &= Z_1(a,t)\, \psi_1(c) + Z_2(a,t)\, \psi_2(c) \\ \lambda(a, c, t) &= \Lambda_1(a,t)\, \zeta_1(c) + \Lambda_2(a,t)\, \zeta_2(c) \end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

avec

$$\phi_1 = 1 \quad ; \quad \phi_2 = \left(\frac{c}{h}\right)$$

$$\psi_1 = \frac{c}{h} \quad ; \quad \psi_2 = \left(\frac{c}{h}\right)^2$$

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{c}{h}\right) \quad ; \quad \zeta_2 = \left(1 - \frac{c}{h}\right)^2$$

Pour un écoulement plan le système (3.1) s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} \rho x_{tt} + \frac{D(\lambda, z)}{D(a, c)} &= 0 \\ \rho z_{tt} + \frac{D(x, \lambda)}{D(a, c)} + \rho g &= 0 \\ \frac{D(x, z)}{D(a, c)} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (3.7)$$

Substituons les développements (3.6) dans (3.7). Il vient :

$$L'_1(a,c,t) = \rho\left(X_{1tt} + \frac{c}{h} X_{2tt}\right) + \frac{1}{h}\left[\left\{\left(1 - \frac{c}{h}\right)\Lambda_{1a} + \left(1 - \frac{c}{h}\right)^2 \Lambda_{2a}\right\}\right.$$

$$\left. \cdot \left(Z_1 + \frac{2c}{h} Z_2\right) + \left(\Lambda_1 + 2\left(1 - \frac{c}{h}\right)\Lambda_2\right)\left(\frac{c}{h} Z_{1a} + \left(\frac{c}{h}\right)^2 Z_{2a}\right)\right] = o$$

$$L'_2(a,c,t) = \rho\left(\frac{c}{h} Z_{1tt} + \left(\frac{c}{h}\right)^2 Z_{2tt}\right) - \frac{1}{h}\left[\left(X_{1a} + \frac{c}{h} X_{2a}\right)\left(\Lambda_1 - 2\left(1 - \frac{c}{h}\right)\Lambda_2\right)\right.$$

$$\left. + X_2\left\{\left(1 - \frac{c}{h}\right)\Lambda_{1a} + \left(1 - \frac{c}{h}\right)^2 \Lambda_{2a}\right\}\right] + \rho g = o$$

et

$$L'_3(a,c,t) = \left[\frac{1}{h}\left(X_{1a} + \frac{c}{h} X_{2a}\right)\left(Z_1 + 2\frac{c}{h} Z_2\right) - \frac{X_2}{h}\left(\frac{c}{h} Z_{1a} + \left(\frac{c}{h}\right)^2 Z_{2a}\right) - 1\right] = o$$

Nous orthogonaliserons ce système en faisant :

$$\left.\begin{aligned} \int_o^h L'_1(a, c, t)\, \phi_i(c)\, dc &= o \\ \int_o^h L'_2(a, c, t)\, \psi_i(c)\, dc &= o \\ \int_o^h L'_3(a, c, t)\, \zeta_i(c)\, dc &= o \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1,,2)$$

nous trouvons

$$\rho h\left(X_{1tt} + \frac{1}{2} X_{2tt}\right) + \left[Z_1\left(\frac{1}{2}\Lambda_1 + \frac{1}{3}\Lambda_2\right) + \frac{Z_2}{3}\left(\Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2\right)\right]_a = o$$

.... (3.8.1)

$$\rho h\left(\frac{1}{2} X_{1tt} + \frac{1}{3} X_{2tt}\right) + \frac{1}{3} Z_{1a}\left(\Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2\right) + \frac{Z_1}{6}\left(\Lambda_{1a} + \frac{1}{2}\Lambda_{2a}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} Z_{2a}\left(\frac{1}{2}\Lambda_1 + \frac{1}{5}\Lambda_2\right) + \frac{1}{3} Z_2\left(\frac{1}{2}\Lambda_{1a} + \frac{1}{5}\Lambda_{2a}\right) = o$$

... (3.8.2

$$\rho h\left(\frac{1}{3} Z_{1tt} + \frac{1}{4} Z_{2tt}\right) - \left[X_{1a}\left(\frac{1}{2}\Lambda_1 + \frac{1}{3}\Lambda_2\right) + \frac{1}{3} X_{2a}\left(\Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} X_2\left(\Lambda_{1a} + \frac{1}{2}\Lambda_{2a}\right)\right] + \frac{1}{2}\rho gh = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.8.3)$$

$$\rho h \left(\frac{1}{4} Z_{1tt} + \frac{1}{5} Z_{2tt}\right) - \left[\frac{X_{1a}}{3}\left(\Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2\right) + \frac{X_{2a}}{2}\left(\frac{1}{2}\Lambda_1 + \frac{1}{5}\Lambda_2\right) - \frac{X_2}{6}\left(\frac{\Lambda_{1a}}{2} + \frac{\Lambda_{2a}}{6}\right)\right] + \frac{1}{3}\rho g h = o \quad \ldots (3.8.4)$$

$$Z_1 X_{1a} + \frac{1}{4} Z_2 X_{1a} + \frac{1}{8} Z_1 X_{2a} - \frac{1}{8} X_2 Z_{1a} = h \quad \ldots (3.8.5)$$

et $$Z_1 X_{1a} - \frac{1}{5} Z_2 X_{2a} + \frac{1}{10} X_2 Z_{2a} = h \quad \ldots (3.8.6)$$

Le système (3.8) représente les équations de la deuxième approximation des ondes de gravité en eau peu profonde. Nous aurions pu éliminer Λ_1 et Λ_2 de ce système pour arriver à un système de 4 équations aux dérivés partielles mais ces équations sont beaucoup trop lourdes et ne présentent pas d'intérêt. Nous n'avons pas pu intégrer analytiquement ce système avec une condition de périodicité. Faute de pouvoir intégrer analytiquement les équations du système (3.8) nous pourrions les intégrer par une méthode numérique.

2 - COMPARAISON DES EQUATIONS DE LA PREMIERE APPROXIMATION DES ONDES LONGUES AVEC LES EQUATIONS DE SERRE.

SERRE (1953) a obtenu ses équations en variables d'EULER, et cet auteur s'est limité à un problème plan. Pour pouvoir comparer ses équations à la solution de première approximation il faudra exprimer cette solution pour un problème plan et transposer les équations en variables d'EULER.

Nous étudierons des ondes cylindriques, nous ferons donc :

$$y = b$$

et $$\frac{\partial}{\partial b} = o$$

dans les équations (3.5) qui s'écrivent alors :

$$h x_{tt} + \left[\frac{1}{2} \eta^2 \left(g + \frac{2}{3} \eta_{tt}\right)\right]_a = o \quad \ldots (3.9.1)$$

$$x_a = \frac{h}{\eta} \quad \ldots (3.9.2)$$

Avant de transposer les équations (3.9) en variables d'EULER nous mettrons ce système sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial a} \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial a}} \left[g + \frac{2}{3} \frac{\partial v_\ell}{\partial t} \right] + \frac{\eta}{3} \frac{\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial v_\ell}{\partial t}\right)}{\frac{\partial x}{\partial a}} = 0 \qquad \ldots (3.10.1)$$

$$v_\ell + \eta \frac{\partial u}{\partial a} \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial a}} = o \qquad \ldots (3.10.2)$$

$$\text{avec} \quad v_\ell = \frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad \ldots (3.10.3)$$

v_ℓ étant la composante verticale de la vitesse à la surface libre.

2.1 - Transposition en variables d'EULER

Nous avons à passer des variables de LAGRANGE (a,t) aux variables d'EULER (x,t) ; nous utiliserons donc les transpositions suivantes :

Variables de LAGRANGE		Variables d'EULER
$x\ (a, t)$	$\longrightarrow$	x
$g\ (a, t)$	$\longrightarrow$	$g\ (x, t)$

g étant une fonction quelconque. Nous utiliserons aussi les relations différentielles suivantes.

$\frac{\partial g}{\partial a} \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial a}}$	$\longrightarrow$	$\frac{\partial g}{\partial x}$
$\frac{\partial g}{\partial t}$	$\longrightarrow$	$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x}$

Les équations (3.10) s'écrivent alors, en variables d'EULER

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\left[g + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_\ell}{\partial t} + u \frac{\partial v_\ell}{\partial x}\right)\right] + \frac{\eta \partial}{3} \frac{\left(\frac{\partial v_\ell}{\partial t} + u \frac{\partial v_\ell}{\partial x}\right)}{\partial x} = o \\ &v_\ell + \eta \frac{\partial u}{\partial x} = o \\ &\text{avec} \quad v_\ell = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned}\right\}$$

et $u = u(x, t)$

Nous multiplierons maintenant la 1ère équation du système (3.11) par η/g et nous utiliserons les deux autres équations pour mettre le système sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\eta}{g} u_t + \frac{u\eta}{g} u_x + \eta \eta_x + \frac{\eta^2}{g} \eta_x \left[u_x^2 - u u_{xx} - u_{xt} \right] \\ &\qquad + \frac{\eta^3}{3g} \left[u_x u_{xx} - u u_{xxx} - u_{xxt} \right] = o \\ &\eta_t + \left[u \eta \right]_x = o \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

2.2 - Comparaison avec les équations de SERRE.

Les équations de SERRE s'écrivent, avec nos notations, pour un fond horizontal et en l'absence de frottement

$$M(x, t) = \frac{\eta^2}{2} + \frac{u^2 \eta}{g} + \frac{\eta^3}{3g} \left[u_x^2 - u u_{xx} - u_{xt} \right]$$

$$M_x + \frac{1}{g} \left[u \eta \right]_t = o$$

$$\eta_t + \left[u \eta \right]_x = o$$

En éliminant $M(x, t)$ de ces équations il vient

$$\frac{1}{g} \eta u_t + \frac{u}{g} \eta_t + \eta \eta_x + \frac{2 u \eta}{g} u_x + \frac{u^2}{g} \eta_x$$

$$+ \frac{\eta^2}{g} \eta_x \left[u_x^2 - u u_{xx} - u_{xt} \right] + \frac{\eta^3}{3g} \left[u_x u_{xx} - u u_{xxx} - u_{xxt} \right] = o$$

$$\text{et } \eta_t + \left[u \eta \right]_x = o$$

Nous utiliserons la 2ème équation pour simplifier la première ; nous aurons alors :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\eta}{g} u_t + \frac{u\eta}{g} u_x + \eta \eta_x + \frac{\eta^2}{g} \eta_x \left[u_x^2 - u u_{xx} - u_{xt} \right] \\ &\qquad + \frac{\eta^3}{3g} \left[u_x u_{xx} - u u_{xxx} - u_{xxt} \right] = o \\ &\eta_t + \left[u \eta \right]_x = o \end{aligned}\right\} \qquad (3.13)$$

En comparant les équations (3.13) aux équations (3.12) nous nous apercevons qu'elles sont identiques.

La solution (3.5) est identique à la solution de SERRE qui n'est donc que la première approximation des ondes longues avec courbure.

Les hypothèses de SERRE ne permettent pas de vérifier toutes les équations indéfinies du problème. En particulier, elles ne permettent pas de vérifier la condition de SCHWARTZ :

$$\frac{D\ (\overrightarrow{\text{Rot}\ \vec{V}})}{Dt} = o$$

où $\vec{V}$ est le vecteur vitesse.

Par contre, la première approximation des ondes longues avec courbure a été obtenue par une méthode globale d'approximation utilisant un développement sur la base des polynomes, et la solution obtenue vérifie en moyenne dans toute la masse fluide la relation de SCHWARTZ. Ceci justifie les hypothèses de SERRE qui permettent d'obtenir la première approximation des ondes longues.

CHAPITRE IV

LES APPROXIMATIONS DES ONDES LONGUES AVEC LA PRISE EN COMPTE D' UN FOND VARIABLE ET DU FROTTEMENT

La solution de première approximation des ondes longues avec courbure (3.5) a été obtenue pour une onde se propageant dans un canal à fond horizontal, et en supposant le fluide parfait. Cette approximation ne peut donc pas être utilisée dans l'étude des problèmes d'ondes longues se propageant sur un fond incliné et lorsque le frottement n'est pas négligeable ; ces problèmes se rencontrent fréquemment en génie hydraulique. La prise en compte du frottement et de la pente du fond se fait facilement avec la méthode d'approximation que nous avons utilisée.

I - FORMULATION DES EQUATIONS GENERALES

Soit un fond d'équation

$$H = H(x, y)$$

en appelant $Z(a, b, c, t)$ la cote d'une particule au-dessus du fond à l'instant t, nous avons :

$$z(a, b, c, t) = H(x, y) + Z(a, b, c, t)$$

$z(a, b, c, t)$ étant la cote d'une particule au-dessus d'un niveau de référence.

Nous nous intéressons à l'étude des ondes longues avec courbure, c'est-à-dire que nous supposons les grandeurs verticales très faibles devant les grandeurs horizontales, nous devons donc faire l'hypothèse qu'en tout point du fond, la pente est suffisamment faible pour que nous puissions négliger la composante verticale de la vitesse en ce point ; nous pourrons écrire l'équation (1.1) sous la forme :

...

$$I = \int_a \int_b \int_c \int_t \mathcal{L}^*(a, b, c, t)\, da\, db\, dc\, dt \quad \ldots \qquad (4.1)$$

avec :

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}\rho\left(x_t^2 + y_t^2 + Z_t^2\right) - \rho g\,(H + Z) + \lambda\left[\frac{D\,(x, y, H + Z)}{D\,(a, b, c)} - 1\right]$$

Annulons la variation de I :

$$\delta I = 0$$

il vient :

$$\left.\begin{aligned}
&\rho x_{tt} + \left[\lambda \frac{D\,(y,Z)}{D\,(b,c)}\right]_c - \left[\frac{\lambda D\,(y,Z)}{D\,(a,c)}\right]_b + \left[\frac{\lambda D\,(y,Z)}{D\,(a,b)}\right]_c + \rho g H_x = 0\\
&\rho y_{tt} - \left[\frac{\lambda D\,(x,Z)}{D\,(b,c)}\right]_a + \left[\frac{\lambda D\,(x,Z)}{D\,(a,c)}\right]_b - \left[\frac{\lambda D\,(x,Z)}{D\,(a,b)}\right]_c + \rho g H_y = 0\\
&\rho z_{tt} + \left[\frac{\lambda D\,(x,y)}{D\,(b,c)}\right]_c - \left[\frac{\lambda D\,(x,y)}{D\,(a,c)}\right]_b + \left[\frac{\lambda D\,(x,y)}{D\,(a,b)}\right]_c + \rho g = 0\\
&\text{et :} \qquad \frac{D\,(x, y, Z)}{D\,(a, b, c)} = 1
\end{aligned}\right\}$$

Ce système se met sous la forme :

$$\left.\begin{aligned}
&\rho x_{tt} + \frac{D\,(\lambda, y, Z)}{D\,(a, b, c)} + \rho g H_x = 0\\
&\rho y_{tt} + \frac{D\,(x, \lambda, Z)}{D\,(a, b, c)} + \rho g H_y = 0\\
&\rho z_{tt} + \frac{D\,(x, y, \lambda)}{D\,(a, b, c)} + \rho g = 0\\
&\frac{D\,(x, y, Z)}{D\,(a, b, c)} = 1
\end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

Ces équations représentent la forme différentielle des équations de l'hydrodynamique lorsque l'on tient compte de la pente du fond et en supposant cette pente faible en tout point du fond.

...

Nous avons vu au chapitre I que λ représente la pression. On peut donc exprimer la condition dynamique en choisissant le développement de cette fonction. Comme au Chapitre I, on va maintenant développer les fonctions x, y, z et λ sur la base des polynômes en $(\frac{c}{h})$ et on choisira ces développements de façon que les conditions aux limites du domaine fluide soient respectées. Nous devrons exprimer une condition d'imperméabilité des frontièreset une condition de pression nulle à la surface libre.

Le domaine fluide est :

$$D^* = \left[-\infty, \infty\right] \left[-\infty, \infty\right] \left[H_o, H_o + h\right]$$

La variable indépendante c qui représente la cote d'une particule à l'instant initial $t = t_o$ varie entre la cote du fond à l'instant initial $c = H_o$ et la cote de la surface libre à ce même instant $c = H_o + h$ où h représente le tirant d'eau au temps $t = t_o$.

Nous supposerons x et y donnés par les développements suivants:

$$x(a, b, c, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(a, b, t)\, \phi_i(c) \qquad (4.3.1)$$

et : $$y(a, b, c, t) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(a, b, t)\, \phi_i(c) \qquad (4.3.2)$$

et nous prendrons $\phi_i = (\frac{c}{h})^{i-1}$

Pour la variable z nous devrons utiliser un développement qui tienne compte du fond ; nous prendrons :

$$z(a, b, c, t) = H(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} Z_i(a, b, t)\, \psi_i(c) \qquad (4.3.3)$$

et pour que la condition d'imperméabilité du fond soit respectée, nous ferons :

$$\psi_i = \frac{(c - H_o)}{h} \cdot (\frac{c}{h})^{i-1}$$

...

Avec ces développements, le tirant d'eau au temps t quelconque nous sera donné par :

$$\eta\ (a, b, t) \;=\; z\ (a, b, H_o + h, t) - H\ (x, y)$$

et donc par $$\eta\ (a, b, t) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} Z_i\ (a, b, t)\ .\ \left(\frac{H_o + h}{h}\right)^{i-1} \qquad (4.3.4)$$

Pour la pression, nous prendrons :

$$\lambda(a, b, c, t) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\ (a, b, t)\, \xi_i\ (c) \qquad (4.3.5)$$

et pour respecter la condition de pression nulle à la surface libre, nous ferons :

$$\xi_i\ (c) \;=\; \left(\frac{H_o + h - c}{h}\right)\ .\ \left(\frac{c}{h}\right)^{i-1}$$

Pour obtenir les approximations des ondes longues lorsque l'on tient compte de la pente du fond, nous porterons ces développements dans (4.1) et nous résoudrons le problème variationnel (Méthode de RITZ-KANTOROVICH). Nous pouvons aussi rechercher ces approximations par la méthode de GALERKIN en utilisant ces développements dans les équations (4.2) qui représentent la forme différentielle les équations de l'hydrodynamique. Puisque nous ne tenons pas compte du frottement, l'écoulement est conservatif et nous pouvons utiliser les deux méthodes exposées au Chapitre II pour la recherche des approximations des ondes longues avec courbure.

1.1 - Calcul de la première approximation des ondes longues avec courbure en tenant compte de la pente du fond

Nous allons utiliser la méthode de RITZ-KANTOROVICH pour calculer la première approximation des ondes longues avec courbure lorsque l'on tient compte de la pente du fond.

Les développements (4.3.1 à 5) nous donnent :

...

$$\left.\begin{aligned} x &= X_1 (a, b, t) \\ y &= Y_1 (a, b, t) \\ z &= H (X_1, Y_1) + \frac{(c - H_o)}{h} Z_1 (a, b, t) \\ \eta &= Z_1 (a, b, t) \\ \text{et : } \lambda &= \frac{(H_o + h - c)}{h} \Lambda_1 (a, b, t) \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

que nous substituerons dans l'équation (4.1) pour avoir :

$$I = \int_a \int_b \int_c \int_t \left\{ \frac{1}{2} \rho \left(X_{1t}^2 + Y_{1t}^2 + \frac{(c - H_o)^2}{h^2} Z_{1t}^2 \right) \right\}$$
$$- \rho g \left[H + \frac{(c - H_o)}{h} Z_1 \right]$$
$$+ \frac{(H_o + h - c)}{h} \Lambda_1 \left[\frac{Z_1}{h} \cdot \frac{D (X_1, Y_1)}{D (a, b)} - 1 \right] \Bigg\} \, da \, db \, dc \, dt$$

Avant de prendre la variation de I, nous allons effectuer l'intégration en c entre la cote du fond à l'instant initial (H_o) et la cote de la surface libre à ce même instant $(H_o + h)$ pour avoir :

$$I^* = \int_a \int_b \int_t \tilde{\mathcal{L}}(a, b, t) \, da \, db \, dt$$

avec $\tilde{\mathcal{L}}(a, b, t) = \frac{1}{2} \rho h \left[X_{1t}^2 + Y_{1t}^2 + \frac{1}{3} Z_{1t}^2 \right] \ldots$

$$- \rho g h \left[H + \frac{1}{2} Z_1 \right] + \frac{h}{2} \Lambda_1 \left[\frac{Z_1}{h} \cdot \frac{D (X_1, Y_1)}{D (a, b)} - 1 \right]$$

Annulons la variation de I^* :

$$\delta I^* = 0$$

...

il vient :

$$\left.\begin{aligned}
&\rho h\, X_{1tt} + \frac{1}{2} \cdot \frac{D(\Lambda_1, Z_1, Y_1)}{D(a,b)} + \rho g\, h\, H_{X_1} = 0 \\
&\rho h\, Y_{1tt} + \frac{1}{2} \cdot \frac{D(X_1, \Lambda_1, Z_1)}{D(a,b)} + \rho g\, h\, H_{Y_1} = 0 \\
&h\left(\frac{1}{2} g + \frac{1}{3} Z_{1tt}\right) - \frac{1}{2} \Lambda_1 \frac{D(X_1, Y_1)}{D(a,b)} = 0 \\
&Z_1 \frac{D(X_1, Y_1)}{D(a,b)} = h
\end{aligned}\right\}$$

La résolution de ce système nous donne :

et :

$$\left.\begin{aligned}
&\Lambda_1 = 2\, \rho Z_1 \left(\frac{1}{2} g + \frac{1}{3} Z_{1tt}\right) \\
&h\, X_{1tt} + \frac{D\left(Z_1^2 \left(\frac{1}{2} g + \frac{1}{3} Z_{1tt}\right), Y_1\right)}{D(a,b)} + g\, h\, H_{X_1} = 0 \\
&h\, Y_{1tt} + \frac{D\left(X_1, Z_1^2 \left(\frac{1}{2} g + \frac{1}{3} Z_{1tt}\right)\right)}{D(a,b)} + g\, h\, H_{Y_1} = 0 \\
&Z_1 \frac{D(X_1, Y_1)}{D(a,b)} = h
\end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

Les équations (4.5), compte tenu de (4.4) nous donnent :

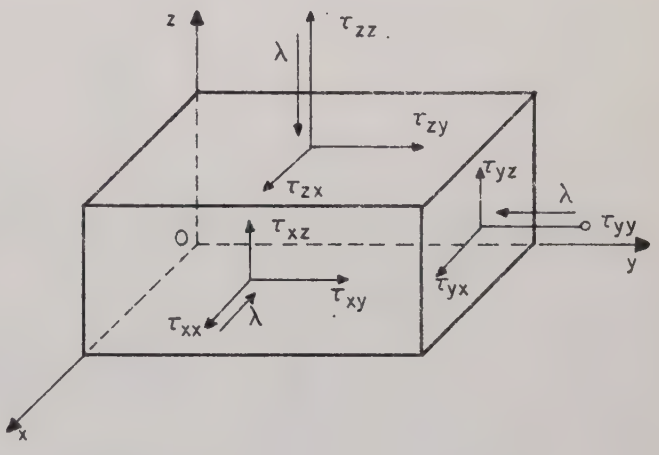
$$\boxed{\begin{aligned}
&h x_{tt} + \frac{D\left(\eta^2 \left(\frac{1}{2} g + \frac{1}{3} \eta_{tt}\right), y\right)}{D(a,b)} + g\, h\, H_x = 0 \\
&h y_{tt} + \frac{D\left(x, \eta^2 \left(\frac{1}{2} g + \frac{1}{3} \eta_{tt}\right)\right)}{D(a,b)} + g\, h\, H_y = 0 \\
&\eta \frac{D(x,y)}{D(a,b)} = h
\end{aligned}} \qquad (4.6)$$

Ce système représente les équations des ondes longues en première approximation lorsque l'on tient compte de la pente du fond. Il n'est pas possible d'intégrer ces équations avec une condition de périodicité après les avoir transposées en variables d'EULER, comme nous le ferons pour

les équations du système (3.5) ; car avec un fond variable, on ne peut pas trouver un système d'axes de translation par rapport auquel l'écoulement devient permanent. Nous devrons avoir recours aux méthodes numériques d'intégration.

2 - LA PRISE EN COMPTE DU FROTTEMENT DANS LES EQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE

Pour prendre en compte le frottement dans les équations dynamiques, nous écrirons ces équations en variables d'EULER. Nous introduirons les contraintes tangentielles dans ces équations que nous transposerons ensuite en variables de LAGRANGE. Dans le repère orthonormé direct Oxyz, l'équation d'EULER est :



$$\frac{\overrightarrow{DV}}{Dt} = \overrightarrow{F} + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{Div} (\overline{\overline{\tau}}) \qquad (4.7)$$

où $\overline{\overline{\tau}}$ est le tenseur des contraintes :

$$\overline{\overline{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} - \lambda \end{bmatrix}$$

où
- τ_{xx}, τ_{yy} et τ_{zz} représentent les contraintes normales,
- τ_{xy}, τ_{xz}, ... etc représentent les contraintes tangentielles
- λ représente la pression.

Ce tenseur est symétrique.

...

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

et :

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$\vec{V}$ est le vecteur vitesse de composantes (u, w, v) et, en supposant le canal horizontal, $\vec{F}$ sera le vecteur de composantes (0, 0, - g).

Nous négligerons les contraintes normales devant la pression, le tenseur des contraintes devient alors :

$$\bar{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} -\lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & -\lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & -\lambda \end{bmatrix}$$

La conservation des quantités de mouvement dans un canal à fond horizontal s'exprime alors par :

$$\left.\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \tau xy}{\partial y} + \frac{\partial \tau xz}{\partial z} \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial \tau xy}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \tau yz}{\partial z} \\ \rho \frac{dv}{dt} &= -\rho g + \frac{\partial \tau xz}{\partial x} - \frac{\partial \tau yz}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

Nous supposerons de plus que les gradients horizontaux des contraintes tangentielles sont négligeables devant le gradient vertical de ces contraintes et devant le gradient de pression.

$$\frac{\partial \tau xz}{\partial x} + \frac{\partial \tau yz}{\partial y} \ll \frac{\partial \lambda}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \tau xy}{\partial x} \ll \frac{\partial \tau yz}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \tau xy}{\partial y} \ll \frac{\partial \tau xz}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

Cette hypothèse est vérifiée pour les écoulements permanents uniformes mais, pour un écoulement non permanent, elle devient discutable, aussi y reviendrons-nous, mais remarquons tout de suite que nous pouvons négliger τxy devant τxz et τyz

$$\tau xy \ll \begin{cases} \tau xz \\ \\ \tau yz \end{cases}$$

car les gradients de vitesse générateurs de contraintes sont surtout importants près des parois et en particulier au fond.

Avec ces hypothèses simplificatrices, l'équation (4.7) devient :

$$\rho \frac{\overrightarrow{DV}}{Dt} = \rho \overrightarrow{F} - \overrightarrow{\text{grad}}\, \lambda + \frac{\partial \overrightarrow{\textcircled{H}}}{\partial z} \qquad (4.8)$$

où $\overrightarrow{\textcircled{H}}$ est le vecteur de composantes $(\tau xz, \tau yz, 0)$.

Nous allons transposer cette équation en variables de LAGRANGE. Pour cela, nous utiliserons les transpositions suivantes :

Variables d'EULER		Variables de LAGRANGE
x	$\longrightarrow$	$x\,(a, b, c, t)$
y	$\longrightarrow$	$y\,(a, b, c, t)$
z	$\longrightarrow$	$z\,(a, b, c, t)$

et les relations différentielles suivantes :

$$\frac{df}{dt} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \longrightarrow \frac{D\,(f, y, z)}{D\,(a, b, c)} \cdot \frac{1}{\frac{D\,(x, y, z)}{D\,(a, b, c)}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \longrightarrow \frac{D\,(x, f, z)}{D\,(a, b, c)} \cdot \frac{1}{\frac{D\,(x, y, z)}{D\,(a, b, c)}}$$

$$\frac{\partial t}{\partial z} \longrightarrow \frac{D\,(x, y, f)}{D\,(a, b, c)} \cdot \frac{1}{\frac{D\,(x, y, z)}{D\,(a, b, c)}}$$

où f est une fonction quelconque.

Remarquons tout de suite que l'équation de continuité exprimée en variables de LAGRANGE donne, pour un fluide incompressible :

$$\frac{D\,(x,\,y,\,z)}{D\,(a,\,b,\,c)} = 1$$

En utilisant ces transpositions dans l'équation (4.8), nous trouvons :

$$\left.\begin{aligned} \rho\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{D\,(\lambda,\,y,\,z)}{D\,(a,\,b,\,c)} &= \frac{D\,(x,\,y,\,\tau xz)}{D\,(a,\,b,\,c)} \\ \rho\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{D\,(x,\,\lambda,\,z)}{D\,(a,\,b,\,c)} &= \frac{D\,(x,\,y,\,\tau yz)}{D\,(a,\,b,\,c)} \\ \rho\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{D\,(x,\,y,\,\lambda)}{D\,(a,\,b,\,c)} + \rho g &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.9)$$

qui sont les équations dynamiques exprimées en variables de LAGRANGE lorsque l'on tient compte du frottement dans un canal à fond horizontal.

Pour avoir les équations dynamiques qui tiennent compte à la fois du frottement et de la pente du fond, on voit qu'il suffit d'ajouter les seconds membres de (4.9) aux équations (4.2). Il vient alors :

$$\left.\begin{aligned} \rho\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{D\,(\lambda,\,y,\,z)}{D\,(a,\,b,\,c)} &= \frac{D\,(x,\,y,\,\tau xz)}{D\,(a,\,b,\,c)} - \rho g H_x \\ \rho\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{D\,(x,\,\lambda,\,z)}{D\,(a,\,b,\,c)} &= \frac{D\,(x,\,y,\,\tau yz)}{D\,(a,\,b,\,c)} - \rho g H_y \\ \rho\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{D\,(x,\,y,\,\lambda)}{D\,(a,\,b,\,c)} + \rho g &= 0 \\ \text{et} \quad \frac{D\,(x,\,y,\,z)}{D\,(a,\,b,\,c)} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (4.10)$$

Ce système nous donne les équations de l'hydrodynamique en variable de LAGRANGE lorsque l'on tient compte à la fois du frottement et de la pente du fond.

...

2.1 - Calcul de la première approximation des ondes longues avec courbure avec la prise en compte du frottement et de la pente du fond

Nous allons utiliser la méthode de GALERKIN pour calculer la première approximation des ondes longues avec courbure. Les développements (4.3.1-5) nous donnent, en première approximation :

$$\left.\begin{aligned} x &= X_1 (a, b, t)\, \phi_1 (c) \\ y &= Y_1 (a, b, t)\, \phi_1 (c) \\ z &= H (X_1, Y_1) + Z_1 (a, b, t)\, \psi_1 (c) \\ \eta &= Z_1 (a, b, t) \\ \text{et :} \quad \lambda &= \Lambda_1 (a, b, t)\, \xi_1 (c) \end{aligned}\right\} \qquad (4.11)$$

avec : $\phi_1 = 1 \quad ; \quad \psi_1 = \dfrac{(c - H_o)}{H}$

et : $\xi_1 = \dfrac{(H_o + h - c)}{h}$

Substituons ces valeurs dans les équations (4.10), il vient :

$$G_1 (a, b, c, t) = \rho X_{1tt} + \frac{(H_o + h - c)}{h^2} Z_1 \frac{D (\Lambda_1, Y_1)}{D (a, b)} + \frac{(c - H_o)}{h^2} \Lambda_1 \frac{D (Z_1, Y_1)}{D (a, b)} - (\tau xz)_c \cdot \frac{D (X_1, Y_1)}{D (a, b)} + \rho g H_{X_1}$$

$$G_2 (a, b, c, t) = \rho Y_{1tt} + \frac{(H_o + h - c)}{h^2} Z_1 \frac{D (\Lambda_1, X_1)}{D (a, b)} + \frac{(c - H_o)}{h^2} \Lambda_1 \frac{D (X_1, Y_1)}{D (a, b)} - (\tau yz)_c \cdot \frac{D (X_1, Y_1)}{D (a, b)} + \rho g H_{Y_1}$$

$$G_3 (a, b, c, t) = \rho \frac{(c - H_o)}{h} Z_{1tt} - \frac{1}{h} \Lambda_1 \frac{D (X_1, Y_1)}{D (a, b)} + \rho g$$

$$G_4 (a, b, c, t) = \frac{Z_1}{h} \cdot \frac{D (X_1, Y_1)}{D (a, b)} - 1$$

Nous orthogonaliserons ce système en faisant :

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{H_o}^{H_o+h} G_1\,(a, b, c, t)\,\phi_1\,(c)\,dc = 0\\
&\int_{H_o}^{H_o+h} G_2\,(a, b, c, t)\,\phi_1\,(c)\,dc = 0\\
&\int_{H_o}^{H_o+h} G_3\,(a, b, c, t)\,\psi_1\,(c)\,dc = 0\\
\text{et :}\quad &\int_{H_o}^{H_o+h} G_4\,(a, b, c, t)\,\xi_1\,(c)\,dc = 0
\end{aligned}\right\}$$

nous trouvons :

$$\left.\begin{aligned}
&\rho h\, X_{1tt} + \frac{1}{2}\,\frac{D\,(\Lambda_1, Z_1, Y_1)}{D\,(a, b)} = -\tau_{xo}\,\frac{D\,(X_1, Y_1)}{D\,(a, b)} - \rho g\, h\, H_{X_1}\\
&\rho h\, Y_{1tt} + \frac{1}{2}\,\frac{D\,(X_1, \Lambda_1, Z_1)}{D\,(a, b)} = -\tau_{yo}\,\frac{D\,(X_1, Y_1)}{D\,(a, b)} - \rho g\, h\, H_{Y_1}\\
&\rho h\,\left(\frac{1}{2}\,g + \frac{1}{3}\,Z_{1tt}\right) - \frac{1}{2}\,\Lambda_1\,\frac{D\,(X_1, Y_1)}{D\,(a, b)} = 0\\
\text{et :}\quad &Z_1\,\frac{D\,(X_1, Y_1)}{D\,(a, b)} = h
\end{aligned}\right\} \qquad (4.12)$$

Or nous avons posé :

$$-\tau_{xo} = -\int_{H_o}^{H_o+h} \frac{\partial\,(\tau xz)}{\partial c}\,dc = \left[\tau xz\right]_{c\,=\,H_o+h} - \left[\tau xz\right]_{c\,=\,H_o}$$

et, en supposant la contrainte tangentielle nulle à la surface libre ($c = H_o + h$), nous aurons :

$$\tau_{xo} = \left[\tau xz\right]_{c\,=\,H_o}$$

qui est la contrainte tangentielle au fond suivant Ox.

...

Nous avons aussi posé :

$$-\tau y_o = \int_{H_o}^{H_o+h} \frac{\partial(\tau yz)}{\partial c} dc = -\left[\tau yz\right]_c = 0$$

La 3ème équation du système (4.12) nous donne, compte tenu de la 4ème équation :

$$\Lambda_1 = 2 \rho Z_1 \left(\frac{1}{2} g + \frac{1}{3} Z_{1tt}\right)$$

et nous substituerons cette valeur de Λ_1 ainsi que la valeur du Jacobien $\frac{D(X_1, Y_1)}{D(a, b)}$ tirée de la dernière équation, dans les deux premières équations de (4.12) pour avoir :

$$\left.\begin{aligned} h X_{1tt} + \frac{D\left(Z_1^2 \left(\frac{1}{2} g + \frac{1}{3} Z_{1tt}\right), Y_1\right)}{D(a, b)} &= -gh \left(H_{X_1} + \frac{\tau x_o}{\rho g Z_1}\right) \\ h Y_{1tt} + \frac{D\left(Y_1, Z_1^2 \left(\frac{1}{2} g + \frac{1}{3} Z_{1tt}\right)\right)}{D(a, b)} &= -gh \left(H_{X_1} + \frac{\tau y_o}{\rho g Z_1}\right) \\ \text{et :} \qquad Z_1 \frac{D(X_1, Y_1)}{D(a, b)} &= h \end{aligned}\right\}$$

En utilisant les relations (4.11), nous pouvons s'écrire ces équations sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} h x_{tt} + \frac{D\left(\eta^2 \left(\frac{1}{2} g + \frac{1}{3} \eta_{tt}\right), y\right)}{D(a, b)} &= -g h \left(H_x + \frac{\tau x_o}{\rho g \eta}\right) \\ h y_{tt} + \frac{D\left(x, \eta^2 \left(\frac{1}{2} g + \frac{1}{2} \eta_{tt}\right)\right)}{D(a, b)} &= -g h \left(H_y + \frac{\tau y_o}{\rho g \eta}\right) \\ \eta \frac{D(x, y)}{D(a, b)} &= h \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

Nous supposerons que les contraintes dues au frottement peuvent être estimées par la loi de CHEZY. En utilisant la formule de MANNING - STRICKLER, nous poserons :

...

$$\tau_{x_o} = \rho g \frac{x_t \mid x_t \mid}{k^2 \eta^{1/3}}$$

et : $$\tau_{y_o} = \rho g \frac{y_t \mid y_t \mid}{k^2 \eta^{1/3}}$$

où k est le coefficient de STRICKLER et dépend de la rugosité du fond.

Les équations (5.13) nous donnent :

$$h\, x_{tt} + \frac{D\left(\eta^2 \left(\frac{1}{2} g + \frac{1}{3}\eta_{tt}\right), y\right)}{D(a, b)} = - g h (H_x + J_x)$$

$$h\, y_{tt} + \frac{D\left(x, \eta^2 \left(\frac{1}{2} g + \frac{1}{3}\eta_{tt}\right)\right)}{D(a, b)} = - g h (H_y + J_y) \qquad (4.14)$$

et : $$\frac{D(x, y)}{D(a, b)} = \frac{h}{\eta}$$

en posant : $$J_x = \frac{x_t \mid x_t \mid}{k^2 \eta^{4/3}}$$

et : $$J_y = \frac{y_t \mid y_t \mid}{k^2 \eta^{4/3}}$$

Le système (4.14) représente les équations de la première approximation des ondes longues avec courbure lorsque l'on tient compte de la pente du fond et du frottement.

Dans cette étude, nous avons fait l'hypothèse que les gradients horizontaux des contraintes tangentielles étaient négligeables devant le gradient vertical de ces contraintes et devant les gradients de pression. Nous avons aussi fait l'hypothèse que nous pouvions utiliser la loi de CHEZY pour calculer les contraintes sur le fond. Ces hypothèses seraient justifiables si l'écoulement était permanent uniforme. Nous pouvons nous demander si elles permettent toujours d'obtenir une bonne approximation de la dissipation de l'énergie par le frottement lorsque l'écoulement n'est pas permanent.

De nombreux auteurs se sont posé cette question, mais personne n'y a apporté une réponse sur le plan théorique. Toutefois, ces hypothèses ont été faites par tous ceux qui ont utilisé les équations de BARRÉ DE SAINT-VENANT et leurs résultats calculés étaient toujours en très bon accord avec l'expérience. Le système (4.14) n'est que la généralisation des équations de BARRÉ DE SAINT-VENANT lorsque l'on tient compte de la courbure des filets liquides, et nous pensons qu'à condition que les vitesses horizontales ne varient pas trop brutalement dans le temps, l'utilisation de ces hypothèses doit permettre d'obtenir une bonne approximation de la perte d'énergie par frottement sur le fond. D'ailleurs, le système (4.14) a déjà été intégré numériquement par DAUBERT et MARVAUD (1967) pour un écoulement plan, et CAUDRON (1968) a comparé leurs résultats numériques à ses résultats expérimentaux, et a montré que l'approximation obtenue par le calcul est très bonne. C'est donc par un fait d'expérience que ces hypothèses peuvent se justifier.

CHAPITRE V

LES APPROXIMATIONS DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE EN VARIABLES D'EULER

A la suite des travaux de LICHTENSTEIN (1929), ECKART (1938) et TAUB (1949), HERIVEL (1954) a donné une formulation variationnelle des équations dynamiques en variables d'EULER. Cet auteur a utilisé directement le principe d'HAMILTON-OSTROGRADSKI, en incluant les conditions de conservation de la masse et de l'entropie par des multiplicateurs de LAGRANGE. Cette formulation, du fait qu'elle a recours à des considérations d'ordre thermodynamique, n'est pas satisfaisante pour l'étude des ondes longues avec courbure.

WHITHAM (1965, 1967) a recherché les approximations de BOUSSINESQ, de KORTEWEG et DE VRIES par un principe variationnel. Il utilise comme Lagrangien l'équation de BERNOUILLI :

$$\mathcal{L} = \int_0^{\eta(x,t)} \left\{ \phi_t + \frac{1}{2} (\vec{\text{grad}}\, \phi)^2 + gz \right\} dz \qquad (5\text{-}1)$$

où ϕ (x, z, t) est le potentiel des vitesses.

Il a donc :

$$I = \int_x \int_t \mathcal{L}(x, t)\, dx\, dt$$

Pour rechercher les approximations des ondes longues avec courbure, WHITHAM développe la fonction ϕ sur la base des polynomes en z et il substitue la première approximation de ϕ obtenue avec ce développement dans (5.1). Il intègre l'équation ainsi obtenue par rapport à z et ensuite il prend la varia-

tion de I. Avec certaines hypothèses, il arrive à obtenir les équations de BOUSSINESQ. On s'aperçoit que la méthode proposée par WHITHAM consiste à rechercher les approximations des ondes longues par la méthode de RITZ-KANTOROVICH mais en utilisant comme Lagrangien l'équation de BERNOUILLI. Sa méthode ne convient donc qu'aux écoulements irrotationnels.

WHITHAM a aussi recherché et trouvé un principe variationnel pour obtenir les équations de KORTEWEG et DE VRIES mais le Lagrangien qu'il utilise n'a pas un sens physique très évident. En fait, WHITHAM est parti des équations de KORTEWEG et DE VRIES et a cherché le Lagrangien qui donnait ces équations comme équations d'EULER du problème variationnel. Il ressort aussi de ses travaux ainsi que de ceux de LUKE (1966, 1967) que le Lagrangien (5.1) est celui qui présente le plus d'intérêt pour l'étude des ondes de gravité irrotationnelle par une méthode variationnelle.

N'ayant pu trouver un principe variationnel satisfaisant pour l'étude des ondes de gravité rotationnelles en variables d'EULER, nous ferons cette étude par la méthode de GALERKIN en utilisant la forme classique des équations dynamiques. Nous retrouverons ainsi la solution de première approximation des ondes longues que nous avions obtenue par la méthode de RITZ-KANTOROVICH et celle de GALERKIN lorsque nous avions traité le problème en variables de LAGRANGE.

1 - Formulation générale du problème.

Nous rechercherons les approximations des ondes longues avec courbure dans le repère orthonormé direct Oxyz, l'axe Oz étant pris verticalement et le plan Oxy étant confondu avec le fond. Nous nous limiterons à l'étude d'un problème plan, c'est-à-dire invariant dans une translation d'axe oy.

Dans ce repère, les équations de l'hydrodynamique s'écrivent :

$$u_x + v_z = 0$$

$$u_t + uu_x + vu_z + \frac{1}{\rho} p_x = 0 \qquad (5.2)$$

$$v_t + u v_x + v v_z + g + \frac{1}{\rho} p_z = 0$$

et expriment la conservation de la masse et des quantités de mouvement. u (x, z, t) et v (x, z,t) représentent respectivement les composantes horizontales et verticales de la vitesse et p (x, z, t) représente la pression.

Nous utiliserons ces équations pour rechercher les approximations des ondes longues avec courbure dans le domaine $\mathcal{F}$.

$$\mathcal{F} = \left[o, \eta\ (x, t)\right]\left[-\infty, \infty\right]$$

avec les conditions aux limites qui sont :

$$\begin{aligned} & v\ (x, o, t) = 0 \\ & v\ (x, y, t) = \eta_t + u\ (x, y, t)\,\eta_x \\ \text{et} \quad & p\ (x, z, t) = 0 \end{aligned} \qquad (5.3)$$

et expriment respectivement l'imperméabilité du fond, l'imperméabilité de la surface libre et une pression nulle sur cette surface libre. La pression est prise relative à la pression atmosphérique.

Nous remarquerons que le domaine $\mathcal{F}$ est inconnu a priori car η (x, t) est inconnu. Pour trouver les approximations des ondes longues avec courbure, nous allons résoudre les équations (5.2) avec les conditions aux limites (5.3) Nous rechercherons ces approximations par la méthode de GALERKIN, nous développerons donc u, v et p sur la base des polynomes en z/d où d est le tirant d'eau moyen.

Nous poserons :

$$\left.\begin{aligned} u\ (x, z, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} U_i\ (x, t)\,\phi_i\ (z) \\ v\ (x, z, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} V_i\ (x, t)\,\psi_i\ (z) \\ p\ (x, z, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} P_i\ (x, t)\,\zeta_i\ (z) \end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

Pour que ces développements vérifient la condition d'imperméabilité du fond et la condition de pression nulle à la surface libre ($z = \eta(x, t)$) nous pourrons prendre :

$$\left.\begin{aligned} \psi_i &= (z) = \left(\frac{z}{d}\right)^i \\ \text{et} \quad \zeta_i(z) &= \left(\frac{\eta - z}{d}\right)\left(\frac{z}{d}\right)^{i-1} \\ \text{Nous prendrons aussi} \quad \phi_i(z) &= \left(\frac{z}{d}\right)^{i-1} \end{aligned}\right\} \qquad (5.5)$$

Quant à la condition d'imperméabilité de la surface libre, elle nous sera donnée à l'ordre n d'approximation - compte tenu de (5.4) et de (5.5) - par :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\eta}{d}\right)^i V_i \doteq \eta_t + \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\eta}{d}\right)^{i-1} U_i\right) \eta_x \qquad (5.6)$$

Pour calculer les approximations des ondes longues avec courbure, nous substituerons les développements (5.4) dans (5.2) et nous projetterons les équations obtenues sur la base des polynomes en z/d. Nous résoudrons les équations obtenues après orthogonalisation.

2 - Calcul de la première approximation des ondes longues avec courbure.

En première approximation, les développements (5.4) nous donnent :

$$\left.\begin{aligned} u &= U_1(x, t) \cdot \phi_1(z) \\ v &= V_1(x, t) \cdot \psi_1(z) \\ p &= P_1(x, t) \cdot \zeta_1(z) \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

avec :

$$\phi_1 = 1$$

$$\psi_1 = z/d$$

et $$\zeta_1 = \left(\frac{\eta - z}{d}\right)$$

et la condition cinématique de surface libre, qui s'exprime par (5.6), devient :

$$\frac{\eta}{d} V_1 = U_1 \ \eta_x + \ \eta_t \qquad (5.8)$$

Substituons (5.7) dans les équations (5.2); il vient :

$$R_1 (x, z, t) = U_{1t} + U_1 U_{1x} + \left(\frac{\eta - z}{\rho d}\right) P_{1x} + \frac{P_1}{\eta d} \eta_x$$

$$R_2 (x, z, t) = \frac{z}{d} V_{1t} + z \frac{U_1}{d} V_{1x} + \frac{z}{d^2} V_1^2 + g - \frac{P_1}{\rho d}$$

$$R_3 (x, z, t) = U_{1x} + \frac{V_1}{d}$$

Pour orthogonaliser ces équations, nous ferons :

$$\left.\begin{aligned} &\int_o^{\eta (x,t)} R_1 (x, z, t) \phi_1 (z) \, dz = 0 \\ &\int_o^{\eta (x,t)} R_2 (x, z, t) \psi_1 (z) \, dz = 0 \\ \text{et} \quad &\int_o^{\eta (x,t)} R_3 (x, z, t) \zeta_1 (z) \, dz = 0 \end{aligned}\right\}$$

pour trouver :

$$\left.\begin{aligned} &\eta U_{1t} + \eta U_1 U_{1x} + \frac{\eta^2}{2 \rho d} P_{1x} + \frac{\eta P_1}{\rho d} \eta_x = 0 \qquad (5.9.1) \\ &\frac{\eta^3}{3d^2} V_{1t} + \frac{\eta^3}{3d^2} U_1 U_{1x} + \frac{\eta^3}{3d^3} V_1^2 + \frac{g \eta^2}{2d} - \frac{P_1 \eta^2}{2 \rho d^2} = 0 \qquad (5.9.2) \\ \text{et} \quad &\eta U_{1x} + \eta \frac{V_1}{d} = 0 \qquad (5.9.3) \end{aligned}\right\} \qquad (5.9)$$

Compte tenu de (5.8), l'équation (5.9.3) nous donne :

$$\eta_t + \eta U_{1x} + U_1 \eta_x = 0 \qquad (5.10)$$

L'équation (5.9.2) s'écrit aussi :

$$\frac{\eta^2 P_1}{2 d} = \frac{g \eta^2}{2} + \frac{\eta^2}{3} \left(\frac{\eta}{d} V_{1t} + \frac{\eta}{d} U_1 V_{1x} + \frac{\eta}{d^2} V_1^2\right) \qquad (5.11)$$

Posons : $v_1 (x, t) = \frac{\eta}{d} V_1$

l'équation (5.8) nous donne :

$$v_1 = \eta_t + u \eta_x$$

puisque, en première approximation :

$$u = U_1 (x, t) \qquad (5.12)$$

v_1 représente donc la vitesse verticale à la surface libre. L'accélération verticale sur cette surface libre nous sera alors donnée par :

$$\Gamma (x, t) = \frac{d v_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + u \frac{\partial v_1}{\partial x}$$

Compte tenu de (5.9.3) et de (5.13), nous aurons :

$$\Gamma (x, t) = \eta (u_x^2 - u u_{xx} - u_{xt}) \qquad (5.13)$$

et l'équation (5.11) nous donne :

$$\frac{P_1}{\rho d} = g + \frac{2}{3} \eta (U_1{}^2{}_x - U_1 U_{1xx} - U_{1xt})$$

En première approximation, la pression vaut :

$$\frac{p}{\rho} (x, z, t) = (\eta - z) \cdot \frac{P_1}{\rho d}$$

d'où $$\frac{p\,(x, z, t)}{g} = (\eta - z)\,(g + \frac{2}{3}\Gamma) \qquad (5.14)$$

A cet ordre d'approximation, la distribution des vitesses horizontales dans une section est uniforme et la pression varie linéairement avec la profondeur mais n'est pas hydrostatique.

L'équation (5.9.2) nous donne :

$$V_1 = - d\, U_{1x}$$

et en première approximation la vitesse verticale dans une section vaut :

$$v\,(x, z, t) = \frac{z}{d}\, V_1\,(x, t)$$

d'où $$v\,(x, z, t) = - z\, u_x \qquad (5.15)$$

la vitesse verticale dans une section est une fonction linéaire de la profondeur.

Nous substituerons l'équation (5.11) dans (5.9.1) qui s'écrit aussi :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\,P_1}{2\,\rho d}\right) + \eta\, U_{1t} + \eta\, U_1\, U_{1x} = 0$$

pour avoir :

$$\eta\, U_{1t} + \eta\, U_1\, U_{1x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{g\,\eta^2}{2} + \frac{\eta^2}{3}\left(\frac{\eta}{d}\, V_{1t} + \frac{\eta}{d}\, V_{1x} + \frac{\eta}{d^2}\, V_1^2\right)\right] = 0$$

qui, compte tenu de (5.12) et de (5.13), devient :

$$\eta\, u_t + \eta\, u\, u_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\eta^2}{2}\,(g + \frac{2}{3}\Gamma)\right) = 0$$

Quant à l'équation (5.10), elle peut aussi s'écrire :

$$\eta_t + u\, \eta_x + \eta\, u_x = 0$$

Les équations des ondes longues avec courbure en première approximation sont donc :

$$\eta_t + \eta u_x + u \eta_x = 0$$

$$u_t + u u_x + g \eta_x + \frac{2}{3} \Gamma \eta_x + \frac{1}{3} \eta \Gamma_x = 0 \qquad (5.16)$$

$$\Gamma(x, t) = \eta (u_x^2 - u u_{xx} - u_{xt})$$

En comparant ces équations à celles de BARRE de SAINT-VENANT qui s'écrivent :

$$\eta_t + \eta u_x + u \eta_x = 0$$

$$u_t + u u_x + g \eta_x = 0$$

nous voyons qu'elles ne diffèrent que par le terme d'accélération à la surface libre Γ que cet auteur a négligé en vertu de l'hypothèse des ondes longues <u>sans</u> courbure

$$p^* = c^{te}$$

qui est à la base de ces équations.

Le système (5.16) est identique au système (3.11) obtenu au chapitre III car :

$$\Gamma(x, t) = \frac{\partial v_1}{\partial t} + u \frac{\partial v_1}{\partial x}$$

or, le système (3.11) est la transposition en variables d'EULER des équations de la première approximation des ondes longues avec courbure obtenues en variables de LAGRANGE; la solution en variables d'EULER est donc équivalente à celle obtenue en variables de LAGRANGE.

La prise en compte du frottement et de la pente du fond dans la formulation des ondes longues en variables d'EULER ne présente pas de difficulté ; nous ne la ferons pas.

DEUXIEME PARTIE

LA MECANIQUE DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE

CHAPITRE VI

ETUDE DES CARACTERISTIQUES ET PROPAGATION DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE

Nous étudierons les caractéristiques des équations de première approximation des ondes longues avec courbure dans un canal à fond horizontal et en ne tenant pas compte du frottement. Nous verrons qu'il existe deux caractéristiques doubles. Le système formé par ces équations n'est donc pas totalement hyperbolique et présente un caractère de parabolicité lié à l'existence des caractéristiques doubles.

La première approximation des ondes longues avec courbure constitue une généralisation des équations de BARRE de SAINT-VENANT dans lesquelles a été ajouté un terme d'accélération verticale supposé très faible. Nous étudierons la propagation des ondes longues avec courbure en comparant les propriétés de leurs équations à celles des équations de BARRE de SAINT-VENANT. Pour voir le rôle des caractéristiques doubles dans le comportement de la solution, nous comparerons les équations de ces ondes à l'équation de la chaleur.

Nous linéariserons les équations des ondes longues avec courbure pour traiter un problème aux conditions initiales. Nous verrons alors que ces équations permettent l'étude de phénomènes de propagation et nous aurons un ordre de grandeur des vitesses auxquelles se propagent ces ondes. Nous allons aussi montrer que le phénomène est dispersif et que les ondes de grandes longueurs d'onde se propagent à des vitesses voisines de celles données par la pente des caractéristiques des équations de BARRE de SAINT-VENANT qui sont les caractéristiques des équations obtenues en négligeant l'accélération verticale dans les équations de première approximation des ondes longues avec courbure. Comme ces "caractéristiques" ne sont pas celles de ces équations mais qu'elles jouent un rôle important dans la propagation des ondes longues avec courbure, nous les appellerons les pseudo-caractéristiques.

1 - ETUDE DES CARACTERISTIQUES.

Nous étudierons d'abord les caractéristiques des équations des ondes longues avec courbure en variables d'EULER et nous comparerons ces équations aux équations de BARRE de SAINT-VENANT. Nous ferons l'étude des caractéristiques en variables de LAGRANGE par la suite.

1-1. Etude des caractéristiques en variables d'EULER.

1-1.1. Les caractéristiques des équations des ondes longues sans courbure.

Les équations de BARRE de SAINT-VENANT s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} L_1\left[u,\eta\right] &= u_t + uu_x + g\,\eta_x = 0 \\ L_2\left[u,\eta\right] &= \eta_t + u\eta_x + \eta\,u_x = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

Formons le vecteur :

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}$$

nous mettrons alors ces équations sous la forme vectorielle suivante :

$$A_1 \vec{W}_t + A_2 \vec{W}_x = 0 \qquad (6.2)$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{bmatrix} u & \eta \\ g & u \end{bmatrix}$$

Nous chercherons dans le plan (x, t) les courbes C_j d'équation

$$\varphi_j(x, t) = 0$$

sur lesquels les opérateurs différentiels de la forme $\left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x}\right)$ sont intérieurs. Nous rappellons que la différentiation $(\alpha f_t + \beta f_x)$ de la

fonction f sur une courbe C d'équation $\varphi(x, t) = 0$, avec $\varphi_t^2 + \varphi_x^2 \neq 0$, est intérieure si $\alpha \ \varphi_t + \beta \ \varphi_x = 0$. Les courbes C_j sont dites courbes caractéristiques [cf. COURANT & HILBERT] .

Les dérivées de la fonction f seront connues si la fonction f est connue sur la courbe $\varphi = 0$.

Multiplions la relation (6.2) à gauche par le vecteur $\vec{\lambda}$ des composantes λ_1 et λ_2 .

$$\vec{\lambda} \left[A_1 \vec{W}_t + A_2 \vec{W}_x \right] = 0 \qquad (6.3)$$

et posons :

$$\vec{\mu} \left[\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right] \vec{W} = 0 \qquad (6.4)$$

où μ est le vecteur des composantes μ_1 et μ_2.

Nous chercherons α , β, $\vec{\lambda}$ et $\vec{\mu}$ pour avoir des opérateurs intérieurs sur les courbes C_j . Les équations (6.3) et (6.4) nous donnent :

$$\vec{\mu}\, \alpha = \vec{\lambda} A_1$$
$$\vec{\mu}\, \beta = \vec{\lambda} A_2$$

En supposant $\alpha \neq 0$, nous avons :

$$\vec{\mu} = \vec{\lambda} \frac{A_1}{\alpha}$$

d'où $$\vec{\lambda} \left[A_2 - \frac{\beta A_1}{\alpha} \right] = 0$$

Annulons le déterminant $\Delta = \text{Det} \left[A_2 - \frac{\beta A_1}{\alpha} \right]$

$$\Delta = \begin{vmatrix} u - \frac{\beta}{\alpha} & \eta \\ g & u - \frac{\beta}{\alpha} \end{vmatrix} = 0$$

nous aurons :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{g\eta} \qquad (6.5)$$

qui sont appelés les directions caractéristiques du système (6.1).

Pour chaque valeur de β/α il existe une solution (λ_1, λ_2) du système

$$(u - \frac{\beta}{\alpha})\ \lambda_1 + g\ \lambda_2 = 0$$

$$\eta\lambda_1 + (u - \frac{\beta}{\alpha})\ \lambda_2 = 0$$

Pour $\frac{\beta}{\alpha} = u + \sqrt{g\eta}$ nous aurons $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = + \frac{\sqrt{g}}{\eta}$

et pour $\frac{\beta}{\alpha} = u - \sqrt{g\eta}$ nous aurons $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = - \sqrt{g/\eta}$

Pour chacune de ces valeurs de $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ la combinaison linéaire $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ fait intervenir la différentiation suivant la direction caractéristique correspondante.

De même nous aurons :

$$\vec{\mu}\left[A_2 - \frac{\beta}{\alpha} A_1\right] = 0$$

Pour chaque valeur de β/α il existe une solution (μ_1, μ_2) du système

$$(u - \frac{\beta}{\alpha})\ \mu_1 + g\ \mu_2 = 0$$

$$\eta\mu_1 + (u - \frac{\beta}{\alpha})\ \mu_2 = 0$$

- Pour $\beta/\alpha = u + \sqrt{g\eta}$ nous avons $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \sqrt{\frac{g}{\eta}}$

- pour $\beta/\alpha = u - \sqrt{g\eta}$ nous avons $\frac{\mu_1}{\mu_2} = -\sqrt{g/\eta}$

L'équation (6.4) nous donne alors :

$$\left[u_t + (u + \sqrt{g\eta})\, u_x\right] + \sqrt{g/\eta}\left[\eta_t + (u + \sqrt{g\eta})\, \eta_x\right] = 0$$

$$\text{et}\left[u_t + (u - \sqrt{g\eta})\, u_x\right] - \sqrt{g/\eta}\left[\eta_t + (u - \sqrt{g\eta})\, \eta_x\right] = 0$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm \sqrt{g\eta})\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{u \pm 2\sqrt{g\eta}\right\} = 0 \qquad (6.6)$$

Cette équation exprime l'invariance de la fonction $(u + 2\sqrt{g\eta})$ sur la caractéristique C_+ dont la pente est $\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{g\eta}$; et l'invariance de $(u - 2\sqrt{g\eta})$ sur la caractéristique C_- de pente $\frac{dx}{dt} = u - 2\sqrt{g\eta}$.

Les équations de BARRE de SAINT-VENANT ont deux courbes caractéristiques distinctes sur lesquelles l'opérateur différentiel $(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x})$ est intérieur. Ces équations sont totalement hyperboliques.

1-1.2. Les caractéristiques des équations des ondes longues avec courbure.

Calculons de la même façon les caractéristiques des équations des ondes longues avec courbure. Ces équations s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} u_t + uu_x + (g + \tfrac{2}{3}\Gamma)\,\eta_x + \tfrac{\eta}{3}\,\Gamma_x &= 0 \\ \eta_t + u\eta_x + \eta u_x &= 0 \\ \eta_t + u\eta_x &= W \\ w_t + u\, w_x &= \Gamma \end{aligned}\right\} \qquad (6.7)$$

En tenant compte de la 3ème équation de ce système, la deuxième équation peut s'écrire :

$$\eta u_x = - w$$

Nous mettrons ce système sous la forme vectorielle suivante :

$$B_1 \vec{Z}_t + B_2 \vec{Z}_x = \vec{D} \qquad (6.8)$$

avec

$$\vec{Z} = \begin{pmatrix} u \\ \eta \\ w \\ \Gamma \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ \Gamma \\ - w \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B_2 = \begin{bmatrix} u\,(g + \frac{2}{3}\,\Gamma) & 0 & \eta/3 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplions la relation (6.8) à gauche par le vecteur $\vec{\lambda}$ de composantes λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 ; il vient :

$$\vec{\lambda} \left[\beta_1 \vec{Z}_t + B_2 \vec{Z}_x \right] = \vec{\lambda} . \vec{D}$$

et posons

$$\vec{\mu} \left[\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right] \vec{Z} = \vec{\lambda} \vec{D}$$

Cherchons $\vec{\lambda}$, $\vec{\mu}$, α et β pour avoir des opérateurs intérieurs.

Nous avons :

$$\vec{\lambda} B_1 = \vec{\mu} \alpha$$

et $$\vec{\lambda} B_2 = \vec{\mu} \beta$$

L'élimination de $\vec{\mu}$ de ces équations nous donne :

$$\vec{\lambda}\left[\alpha B_2 - \beta B_1\right] = 0$$

En annulant le déterminant

$$\det\left[\alpha B_2 - \beta B_1\right] = 0$$

nous avons

$$\det\begin{bmatrix} \alpha u - \beta & \alpha(g + \frac{2}{3}\Gamma) & 0 & \alpha\eta/3 \\ 0 & u - \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha u - \beta & 0 \\ \alpha\eta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

qui nous donne l'équation caractéristique

$$\frac{1}{3}\frac{\eta^2}{3}\ \alpha^2\ (\alpha u - \beta)^2 = 0$$

cette équation a pour racines

$$\alpha = 0,\ 0$$

et $$\frac{\beta}{\alpha} = u,\ u$$

Les directions caractéristiques sont donc :

$$\frac{dx}{dt} = u,\ u \quad \text{et} \quad dt = 0,\ 0 \ (\text{c'est-à-dire } \frac{dx}{dt} = \infty\ \infty) \tag{6.9}$$

il existe deux directions caractéristiques doubles.

A chacune de ces valeurs de $\frac{dx}{dt}$ correspond une solution (λ_1, λ_2, λ_3, λ_4) du système

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 (\alpha u - \beta) + \lambda_4 \alpha \eta &= 0 \\ \lambda_1 \alpha \left[g + \frac{2}{3} \Gamma \right] + \lambda_2 (\alpha u - \beta) &= 0 \\ \lambda_3 (\alpha u - \beta) &= 0 \\ \lambda_1 \alpha \frac{\eta}{3} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Lorsque $\alpha = 0$, nous avons

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_4 = 1$$

Lorsque $\frac{\beta}{\alpha} = u$, il vient

$$\lambda_1 = \lambda_4 = 0$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

Nous ne retrouvons pas la 1ère équation du système.

Tout comme avec l'équation de la chaleur

$$u_t + u u_x = k u_{xx}$$

il n'est pas possible de trouver des fonctions invariantes sur les caractéristiques. Remarquons cependant que le changement de variables

$$\nu = \sqrt{g \eta}$$

dans les deux première équations du système (6.7) nous permet d'obtenir par combinaison linéaire

$$u_t + u u_x + 2 \nu \nu_x - 2 \nu_t - 2 \nu_x u - \nu u_x = - \frac{1}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} (\eta^2 \Gamma)$$

$$u_t + u u_x + 2 \nu \nu_x + 2 \nu_t + 2 \nu_x u + \nu u_x = - \frac{1}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} (\eta^2 \Gamma)$$

qui nous donnent

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm \nu) \frac{\partial}{\partial x} \right) \left\{ u \pm 2 \nu \right\} = - \frac{1}{3\eta} \frac{\partial}{\partial x} (\eta^2 \Gamma)$$

Le système (6.7) peut donc s'écrire :

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u + \sqrt{g\eta}\,)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{u + 2\sqrt{g\eta}\right\} &= -\frac{1}{3\eta}\frac{\partial}{\partial x}(\eta^2\Gamma) \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u - \sqrt{g\eta}\,)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{u - 2\sqrt{g\eta}\right\} &= -\frac{1}{3\eta}\frac{\partial}{\partial x}(\eta^2\Gamma) \\
\eta_t + u\ \eta_x &= w \\
w_t + u\ w_x &= \Gamma
\end{aligned}\right\} \qquad (6.10)$$

Considérons l'équation de la chaleur (avec le terme de convection)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{\nu}\,\frac{\partial}{\partial x}\right) u = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (6.11)$$

on sait que lorsqu'on néglige $\bar{\nu}\,\frac{\partial}{\partial x}$ dans le terme de convection cette équation devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et
traduit un phénomène de diffusion. L'équation (6.11) sans second membre exprime l'invariance de u sur une courbe de pente $\frac{dx}{dt} = \bar{\nu}$. Le terme de convection est donc responsable de la propagation et à ce phénomène se superpose une diffusion causée par le terme du second membre qui rend l'équation (6.11) parabolique.

En comparant les deux premières équations (6.10) à l'équation (6.11) on s'aperçoit que si l'on néglige le second membre dans ces équations, on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm \sqrt{g\eta}\,)\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{u \pm 2\sqrt{g\eta}\right\} = 0 \qquad (6.12)$$

qui sont les équations de BARRE de SAINT VENANT.

Ces équations sont purement hyperboliques et traduisent l'invariance des fonctions $(u + 2\sqrt{g\eta}\,)$ et $(u - 2\sqrt{g\eta}\,)$ sur les courbes de pente $\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{g\eta}$ et $\frac{dx}{dt} = u - 2\sqrt{g\eta}$ respectivement. L'équation (6.12)

traduit donc un phénomène de propagation pur. C'est la prise en compte de l'accélération verticale dans les équations des ondes longues avec courbure qui introduit les caractéristiques doubles et donc le caractère parabolique de ces équations.

Le second membre des deux premières équations du système (6.10) s'écrit :

$$\frac{1}{3\eta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)\eta$$

et c'est donc un terme du troisième ordre. Les ondes longues sans courbure se propagent sous la forme d'une marche d'escalier avec un front raide. On peut penser que la prise en compte de l'accélération verticale dans ces équations causeront une atténuation du front et que ces termes du troisième ordre seront responsables des ondulations secondaires observées avec les ondes de FAVRE.

1-2. ETUDE DES CARACTERISTIQUES EN VARIABLES DE LAGRANGE.

1-2.1. Les caractéristiques des équations des ondes longues sans courbure.

Lorsque l'on néglige la courbure dans les équations (3.9) de la première approximation des ondes longues avec courbure ces équations s'écrivent :

$$h\,u_t + g\eta\,\eta_a = 0$$

$$u_a + \frac{h}{\eta^2}\,\eta_t = 0$$

et se mettent sous la forme vectorielle suivante :

$$A_1\vec{W}_t + A_2\vec{W}_a = 0$$

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix} \quad ; \quad A_1 = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h/\eta^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & g\eta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplions cette relation vectorielle à gauche par le vecteur $\vec{\lambda}$ de composantes λ_1 et λ_2; nous avons

$$\vec{\lambda}\,(A_1\vec{W}_t + A_2\vec{W}_a) = 0 \qquad (6.13)$$

Nous poserons :

$$\vec{\mu}\left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial a}\right) \vec{W} = 0 \qquad (6.14)$$

et nous chercherons dans le plan (a, t) les courbes σ_j d'équation φ_i (a, t) = 0, pour lesquels les opérateurs différentiels de la forme $\left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial a}\right)$ sont des opérateurs intérieurs. Nous rechercherons donc les combinaisons linéaires qui permettent de mettre les équations (6.13) sous la forme (6.14).

Comme nous l'avons fait au paragraphe précédent, nous aurons à chercher les racines de l'équation caractéristique

$$\beta^2 \frac{h^2}{\eta^2} = g\eta\ \alpha^2$$

obtenu en annulant le déterminant

$$\det\left[\alpha A_2 - \beta A_1\right] = 0$$

Il vient donc

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = g \frac{\eta^3}{h^2}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{da}{dt} = \pm \frac{\eta}{h} \sqrt{g\eta} \qquad (6.15)$$

qui nous donnent la pente des caractéristiques des équations de BARRE de SAINT-VENANT. Calculons $\vec{\lambda}$ et $\vec{\mu}$; nous avons :

- Pour $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\eta}{h} \sqrt{g\eta}$ $\qquad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \eta \sqrt{g\eta}$ $\qquad \frac{\mu_2}{\mu_1} = \sqrt{\frac{g}{\eta}}$

- Pour $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\eta}{h} \sqrt{g\eta}$ $\qquad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\eta \sqrt{g\eta}$ $\qquad \frac{\mu_2}{\mu_1} = -\sqrt{\frac{g}{\eta}}$

Les équations (6.14) nous donnent alors :

$$u_t + \frac{\eta}{h}\sqrt{g\eta}\,U_a + \sqrt{\frac{g}{\eta}}\,\eta_t + \frac{\eta}{h}\sqrt{g\eta}\cdot\sqrt{\frac{g}{\eta}}\,\eta_a = 0$$

$$u_t + \frac{\eta}{h}\sqrt{g\eta}\,U_a - \sqrt{\frac{g}{\eta}}\,\eta_t - \frac{\eta}{h}\sqrt{g\eta}\cdot\sqrt{\frac{g}{\eta}}\,\eta_a = 0$$

qui s'écrivent

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\eta}{h}\sqrt{g\eta}\,\frac{\partial}{\partial a}\right)\left\{u \pm 2\sqrt{g\eta}\right\} = 0 \qquad (6.16)$$

Les fonctions $(u + 2\sqrt{g\eta})$ sont donc invariantes sur la caractéristique σ_+ de pente $\frac{da}{dt} = \frac{\eta}{h}\sqrt{g\eta}$ et la fonction $(u - 2\sqrt{g\eta})$ est invariante sur la caractéristique σ_- de pente $\frac{da}{dt} = -\frac{\eta}{h}\sqrt{g\eta}$

1-2.2. Les caractéristiques des équations des ondes longues avec courbure.

Les équations de première approximation des ondes longues avec courbure en variables de LAGRANGE s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} h\,u_t + \eta\left(g + \tfrac{2}{3}\Gamma\right)\eta_a + \tfrac{1}{3}\eta^2\Gamma_a &= 0 \\ u_a + \frac{h}{\eta^2}\eta_t &= 0 \\ \eta_t &= w \\ w_t &= \Gamma \end{aligned}\right\} \qquad (6.17)$$

et sous forme vectorielle nous avons

$$B_1\,\vec{H}_t + B_2\,\vec{H}_a = \vec{D}$$

avec

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} u \\ \eta \\ w \\ \Gamma \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \\ \Gamma \end{pmatrix}$$

et

$$B_1 = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{\eta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \eta(g + \frac{2}{3}\Gamma) & 0 & \frac{1}{3}\eta^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplions la relation vectorielle (6.18) à gauche par le vecteur $\vec{\lambda}$ des composantes λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4

$$\vec{\lambda} \left[B_1 \vec{H}_t + B_2 \vec{H}_a \right] = 0$$

et cherchons les combinaisons linéaires qui nous permettent d'avoir des opérateurs intérieurs et mettre l'équation précédente sous la forme

$$\vec{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial a} \right] \vec{H} = 0$$

ces opérateurs étant définis sur les courbes σ_j du plan (a, t) qui ont pour équation

$$\varphi_j (a, t) = 0$$

En remarquant que

$$\vec{\lambda} B_1 = \vec{\mu} \alpha$$

$$\vec{\lambda} B_2 = \vec{\mu} \beta$$

nous aurons $\vec{\lambda} \left[\alpha B_2 - \beta B_1 \right] = 0$

Annulons le déterminant

$$\det \left[\alpha B_2 - \beta B_1 \right]$$

il vient $\frac{1}{3} \eta^2 \alpha^2 \beta^2 = 0$

et les racines de cette équation sont

$$\alpha = 0,0 \quad \text{et} \quad \beta = 0,0$$

c'est-à-dire $dt = 0,0$ et $da = 0,0$

Les pentes des caractéristiques des ondes longues avec courbure sont donc

$$\frac{da}{dt} = 0, 0, \infty, \infty \tag{6.18}$$

Ces caractéristiques sont doubles et forment un réseau de droites qui sont parallèles aux axes 0_a et 0_t .

Pour chacune des valeurs de α et de β il existe une solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ du système

$$-\lambda_1 \beta h + \lambda_2 \alpha = 0$$

$$\lambda_1 \left(\alpha \eta \left(g + \frac{2}{3}\Gamma\right)\right) - \beta \frac{h}{\eta^2} \lambda_2 - \beta \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_4 \beta = 0$$

$$\lambda_1 \frac{\alpha}{3} \eta^2 = 0$$

Pour $\alpha = 0$ nous avons $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$; $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -\frac{\eta^2}{h}$

Pour $\beta = 0$ nous avons $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 1$

Nous ne retrouvons encore une fois que les trois dernières équations du système (6.17) et il n'est pas possible ici aussi de mettre en évidence des invariants sur les caractéristiques en raison du caractère de parabolicité que présentent ces équations.

2 - ETUDE DE LA PROPAGATION DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE

Les phénomènes de propagation d'onde sont représentés par les solutions d'équations aux dérivées partielles hyperboliques avec des conditions initiales et aux limites. Nous avons vu plus haut que les équations de première approximation des ondes longues avec courbure ne sont pas strictement hyperboliques, car elles possèdent des caractéristiques doubles. Pour voir dans quelle mesure elles permettent l'étude des phénomènes de propagation et évaluer les vitesses auxquelles se fait cette propagation, nous étudierons un problème aux conditions initiales avec les équations linéarisées. Evidemment, la linéarisation des équations des ondes longues avec courbure masquera tous les effets non linéaires. Il ne nous sera pas possible d'obtenir les propriétés comme celles de l'onde solitaire, qui sont liées à la non-linéarité des équations. Nous étudierons ces propriétés lorsque nous obtiendrons la solution complète de la houle en eau peu profonde au Chapitre VIII.

2.1 - La linéarisation des équations des ondes longues avec courbure

Supposons un canal de longueur infinie, à pente nulle, dans lequel est établi un régime purement uniforme de vitesse u_o et de tirant d'eau d. Supposons qu'une perturbation intervienne dans l'écoulement et qu'elle soit suffisamment faible pour que nous puissions en aborder l'étude par la méthode de perturbation.

Posons alors :

$$\eta(x, t) = d + \bar{\eta}(x, t)$$

$$u(x, t) = u_o + \bar{u}(x, t)$$

Nous linéariserons les équations (6.7) des ondes longues avec courbure par rapport à $\bar{\eta}$ et $\bar{u}$ pour avoir :

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u}_t + u_o \bar{u}_x + g \bar{\eta}_x + \frac{d}{3} \bar{\eta}_{xtt} + \frac{2}{3} u_o d \bar{\eta}_{xxt} + \frac{d}{3} u_o^2 \bar{\eta}_{xxx} = 0 \\ &\bar{\eta}_t + u_o \bar{\eta}_x + d \bar{u}_x = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.19)$$

En éliminant $\bar{u}$ de ces équations, nous avons :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_o \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_o \frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{\eta}$$

$$- \frac{3}{d^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left[u_o + \sqrt{gd}\right]\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \left[u_o - \sqrt{gd}\right]\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{\eta} = 0$$

Nous retrouvons dans le premier terme les directions caractéristiques :

$$\frac{dx}{dt} = u_o, u_o, \infty, \infty$$

et dans le second terme nous voyons des "caractéristiques" qui ne sont pas les caractéristiques de l'équation, mais qui deviennent prépondérants lorsqu la profondeur d tend vers zéro ; nous les appellerons les pseudo-caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles ci-dessus.

2.2 - Etude d'un problème aux conditions initiales

Nous utiliserons les équations (6.19) pour traiter un problème aux conditions initiales suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \bar{\eta}(x, o) &= a(x) \\ \bar{u}(x, o) &= b(x) \end{aligned}\right\} \qquad (6.20)$$

Nous supposerons que $\bar{\eta}$, $\bar{u}$, a et b présentent toutes les conditions requises pour que nous puissions prendre leur transformée de FOURIER en x.

En notant :

$$F(k, t) = \mathcal{L}_F\left\{f(x, t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)\, e^{-ikx}\, dx$$

nous poserons :

...

$$\hat{H}(k, t) = \mathcal{L}_f \left\{ \bar{\eta}(x, t) \right\}$$
$$\hat{U}(k, t) = \mathcal{L}_f \left\{ \bar{u}(x, t) \right\}$$
$$A(k) = \mathcal{L}_f \left\{ a(x) \right\}$$
$$B(k) = \mathcal{L}_f \left\{ b(x) \right\}$$

Après transformation, les équations linéarisées (6.19) et les conditions initiales (6.20) deviennent :

$$\left.\begin{aligned} \hat{U}_t + ik u_o \hat{U} + ikg \hat{H} + \frac{kd}{3}\left[i \hat{H}_{tt} - 2 u_o k \hat{H}_t - ik^2 u_o^2 \hat{H} \right] = 0 \\ \hat{H}_t + ik u_o \hat{H} + ikd \hat{U} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (6.21)$$

et :

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}(k, o) = A(k) \\ \hat{U}(k, o) = B(k) \end{aligned}\right\} \quad (6.22)$$

Le système (6.21) admet une solution de la forme :

$$\hat{H}(k, t) = \phi(k)\, e^{i\beta t}$$
$$\hat{U}(k, t) = E(k)\, e^{i\beta t}$$

si ϕ et E vérifient le système suivant :

$$\begin{bmatrix} kg - \frac{kd}{3}\left[\beta^2 + 2 k u_o \beta + k^2 u_o^2\right] & \left[k u_o + \beta\right] \\ \left[k u_o + \beta\right] & kd \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi(k) \\ E(k) \end{pmatrix} = 0$$

Ce système est homogène et n'admettra de solution non nulle que si son déterminant est nul. Annulons ce déterminant, il vient :

$$k^2 u_o^2 + 2 k u_o \beta + \beta^2 - k^2 gd + \frac{k^2 d^2}{3}\left[\beta^2 + 2 k u_o \beta + k^2 u_o^2\right] = 0$$

cette équation a pour racines :

...

$$\beta_1 (k) = - k \left(u_o + \sqrt{\frac{gd}{1 + \frac{k^2 d^2}{3}}}\right)$$

$$\beta_2 (k) = - k \left(u_o - \sqrt{\frac{gd}{1 + \frac{k^2 d^2}{3}}}\right)$$

D'autre part ϕ et E sont liés par la relation :

$$\phi = \frac{kd}{(\beta + k u_o)} E$$

La solution de (6.21) qui vérifie (6.22) est donc :

$$\hat{H} (k, t) = \phi_1 (k) e^{-i\beta_1 t} + \phi_2 (k) e^{-i\beta_2 t}$$

et :
$$\hat{U} (k, t) = E_1 (k) e^{-i\beta_1 t} + E_2 (k) e^{-i\beta_2 t}$$

avec :
$$\phi_1 = \frac{K B}{2} + \frac{A}{2}, \qquad E_1 = \frac{B}{2} + \frac{A}{2K}$$

$$\phi_2 = - \phi_1 \qquad , \qquad E_2 = - E_1$$

et :
$$K = \sqrt{\frac{d}{g} \left(1 + \frac{k^2 d^2}{3}\right)}$$

La solution du problème aux conditions initiales est :

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(k) \left\{ e^{i \left[kx - \beta_1 t\right]} - e^{(i kx - \beta_2 t)} \right\} dk$$

et
$$\bar{u} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(k) \left\{ e^{i \left[kx - \beta_1 t\right]} - e^{(i kx - \beta_2 t)} \right\} dk$$

2.3 - Etude de la solution du problème aux conditions initiales

Nous ne nous intéresserons qu'aux ondes se propageant de gauche à droite, nous supposerons donc :

$$u_o < \frac{\sqrt{gd}}{\left(1 + \frac{k^2 d^2}{3}\right)^{1/2}}$$

et nous prendrons :

$$\bar{\eta}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(k)\, e^{i(kx - \beta_1 t)}\, dk \qquad (6.23)$$

En se donnant $A(k)$ et $B(k)$ nous pourrons calculer $\phi_1(k)$ et chercher la solution d'un problème particulier. Il n'est pas nécessaire de le faire pour obtenir les principales propriétés de la solution (6.23) ; elles s'obtiennent en analysant le comportement de la solution lorsque t tend vers l'infini, par la méthode de la phase stationnaire de KELVIN et STOKES.

En posant :

$$\theta(k) = k\frac{x}{t} - \beta_1(k)$$

nous aurons :

$$\bar{\eta}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k)\, e^{it\theta(k)}\, dk \qquad (6.24)$$

Supposons t constant et très grand. Avec cette hypothèse, la valeur de l'exponentielle dans (6.24) oscillera très rapidement lorsque k varie — sauf si $\theta(k)$ reste pratiquement constant — et les contributions positives et négatives à l'intégrale (6.24) s'élimineront mutuellement. Par conséquent, les contributions principales à cette intégrale se feront au voisinage des valeurs de $k = k_o$ pour lesquelles $\theta(k)$ est stationnaire et qui seront données par :

$$\frac{d\theta}{dk} = 0$$

à la condition que la fonction $\phi_1(k)$ ne varie pas trop rapidement au voisinage de k_o.

Il vient : $\theta' = \frac{x}{t} - \beta'_1 = 0$

c'est-à-dire : $\frac{x}{t} = \beta'_1 (k)$

qui nous donne :

$$k_o = \pm \sqrt{\frac{3}{d}} \left\{ \left(\frac{gd}{\left[\frac{x}{t} - u_o \right]^2} \right)^{1/3} - 1 \right\}^{1/2} \qquad (6.25)$$

et nous détermine k_o en fonction de $\frac{x}{t}$. Il y a deux valeurs de k_o de signes opposés ; nous noterons k_{o1} la valeur positive et k_{o2} la valeur négative.

Remarquons que lorsque :

$$\frac{x}{t} = \pm (u_o + \sqrt{gd})$$

nous avons :

$$k_o = 0$$

et que pour $\frac{x}{t} > (u_o + \sqrt{gd})$ k_o est imaginaire. Pour que k_o soit réel, nous devons exprimer la restriction suivante :

$$\frac{x}{t} \leqslant (u_o + \sqrt{gd}) \quad ..... \qquad (6.26)$$

On démontre [cf. STOKER (1957), § 6.8] qu'en supposant t très grand, l'intégrale (6.24) peut être approchée par :

$$\overline{\eta}(x, t) = \sum_j \frac{\phi_1 (k_{oj}) \, e^{i (t\theta(k_{oj}) \pm \pi/4)}}{\left\{ 2\pi t \, | \theta'' (k_{oj}) | \right\}^{1/2}} + O\left(\frac{1}{t}\right) \qquad (6.27)$$

les k_{oj} étant les zéros de $\theta'(k)$ pour lesquels $\theta''(k_{oj}) \neq 0$. Le second membre de (6.27) est le premier terme d'une série asymptotique. L'ambiguïté de signe dans l'exponentielle est levée par le signe de $\theta''(k_{oj})$.

Lorsque $\theta''(k_{oj}) = 0$ on démontre aussi que :

...

$$\overline{\eta}(x,t) = \sum_m \phi_1(k_{om}) \frac{\Gamma(1/3)}{2\pi\sqrt{3}} \left(\frac{6}{t\,|\theta'''(k_{om})|}\right)^{1/3} e^{it\theta(k_{om})} + 0\left(\frac{1}{t^{2/3}}\right) \quad \ldots \quad (6.28)$$

où Γ est la fonction Gamma et les k_{om} sont les zéros de $\theta'(k_o)$ pour lesquels $\theta''(k_{om}) = 0$ mais $\theta'''(k_{om}) \neq 0$.

Calculons $\theta''(k)$:

$$\theta''(k) = -\frac{k\,g^2\sqrt{gd}}{\left\{1 + \frac{k^2 d^2}{3}\right\}^{5/2}}$$

Remarquons que $\theta''(k) = 0$ pour $\frac{x}{t} = u_o + \sqrt{gd}$.

Par conséquent, lorsque $\frac{x}{t} < u_o + \sqrt{gd}$ nous avons :

$$\overline{\eta}(x,t) = \mathcal{R}_e \left\{ \frac{\phi_1(k_{o_1})\, e^{i\left(t\theta(k_{o_1}) - \frac{\pi}{4}\right)}}{\left\{2\pi t\,|\,\theta''(k_{o_1})|\right\}^{1/2}} + \frac{\phi_1(k_{o_2})\, e^{i\left(t\theta(k_{o_2}) - \frac{\pi}{4}\right)}}{\left\{2\pi t\,|\,\theta''(k_{o_2})|\right\}^{1/2}} + 0\left(\frac{1}{t}\right) \right.$$

Mais puisque $k_{o_1} = -k_{o_2}$

et que : $\beta_1(-k) = \beta_1(k)$

en utilisant les propriétés de symétrie des transformées de FOURIER, nous aurons :

$$\overline{\eta}(x,t) = \frac{\sqrt{2}\,\phi_1(k_{o_1})}{\left\{\pi t\,|\,\theta''(k_{o_1})|\right\}^{1/2}} \cos\left(k_{o_1} x - \beta_1(k_{o_1})t - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{t}\right) \quad (6.29)$$

...

qui nous donne une approximation de $\overline{\eta}(x, t)$ aux grandes valeurs de t et par conséquent aux grandes valeurs de x puisque :

$$x = \beta'_1 (k_{o1})\, t$$

Remarquons tout de suite que $\beta'_1 (k_{o1})$ est la vitesse de groupe $V(k_{o1})$ d'un train d'ondes dont le spectre d'amplitude est donné par $\phi_1 (k_{o1})$:

$$V(k_{o1}) = \beta'_1 (k_{o1}) = u_o + \frac{\sqrt{gd}}{\left\{1 + \frac{k_\alpha^2 d^2}{3}\right\}^{3/2}}$$

Sur la caractéristique :

$$x = x_f = (u_o + \sqrt{gd})\, t$$

x_{o1} est nul, $\theta''(k_{o1})$ l'est aussi et l'approximation (6.29) qui nous donne le profil de la surface libre n'est plus valable. En utilisant la relation (6.28) qui nous donne la solution lorsque $\theta''(k_{o1}) = 0$ et $\theta'''(k_{o1}) \neq 0$ nous aurons :

$$\overline{\eta}(x_f, t) = \mathcal{R}_e \left\{ \frac{\phi_1 (o)\, \Gamma(1/3)}{2\pi \sqrt{3}} \left(\frac{6}{t\, d^2 \sqrt{gd}}\right)^{1/3} e^{-i\beta_1(o)t} \right\} + O\left(\frac{1}{t^{2/3}}\right)$$

car : $$\theta'''(k)_{k=0} = -d^2 \sqrt{gd}$$

Mais puisque $\beta_1 (o) = 0$

nous avons :

$$\overline{\eta}(x, t) = \frac{\phi_1 (o)\, \Gamma(1/3)}{2\pi \sqrt{3}} \left(\frac{6}{t\, d^2 \sqrt{gd}}\right)^{1/3} + O\left(\frac{1}{t^{2/3}}\right) \qquad (6.30)$$

Lorsque :

$$\frac{x}{t} > (u_o + \sqrt{gd})$$

nous avons vu que k est imaginaire, par conséquent la phase dans l'équation (6.24) — qui exprime le profil de la surface libre — n'est jamais stationnaire. On peut montrer alors que l'intégrale dans cette équation est de

l'ordre de $(1/t)$. Pour ces valeurs de x/t nous aurons donc :

$$\eta(x, t) = d + \overline{\eta}(x, t) = d + 0\,(1/t).$$

Ces résultats nous montrent que la perturbation se compose d'un train d'ondes se propageant avec la vitesse de groupe V et que chacune des ondes a une vitesse qui dépend de sa longueur d'onde $(\lambda = \frac{2\pi}{k})$, les ondes les plus longues ayant les plus grandes célérités. Les ondes de ce train s'amortissent suivant une loi $1/\sqrt{t}$.

En $x = (u_o + \sqrt{gd})\,t$ la perturbation n'est plus périodique et s'amortit plus lentement que les ondes du train puisque l'amortissement se fait suivant une loi $\frac{1}{3\sqrt{t}}$.

2.4 - Etude de la célérité

Posons $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

et : $C = \frac{\beta_1}{k}$

λ est la longueurd'onde et C est la célérité ou vitesse de phase. Nous avons donc :

$$C(k) = u_o + \sqrt{\frac{gd}{1 + \frac{4\pi^2 d^2}{3\lambda^2}}} \quad \ldots \qquad (6.31)$$

Ce résultat montre que le phénomène est dispersif $(C = f(\lambda))$.

Puisque nous avons supposé que les ondes se propagent en eau peu profonde, cette équation nous donne, pour les petites longueurs d'onde :

$$\lim_{(\lambda) \to 0} \quad C = u_o$$

et pour les grandes longueurs d'onde :

$$\lim_{\lambda \to \infty} \quad C = u_o + \sqrt{gd}$$

...

Nous avons tracé sur la figure (6.1,)' la variation de $\left(\frac{C - u_o}{\sqrt{gd}}\right)$ en fonction de λ/d. Nous voyons sur cette figure que les ondes longues — c'est-à-dire celles pour lesquelles le rapport λ/d est très grand ($\lambda/d > 10$) — ont une célérité voisine de $u_o + \sqrt{gd}$.

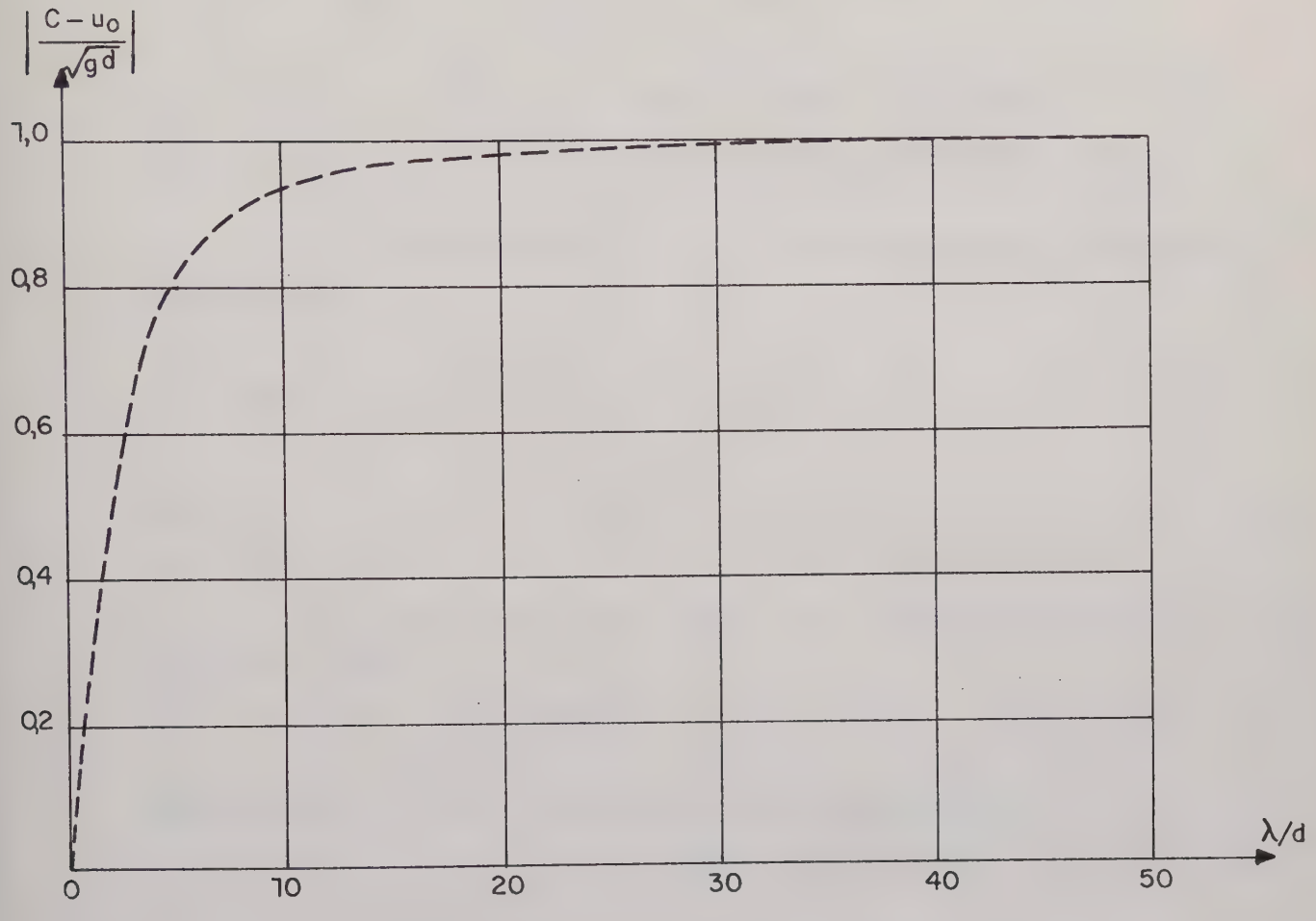


Fig. 6.1 - VARIATION DE LA CELERITE EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE

...

2.5 - Comparaison des résultats à ceux des théories linéaires

Nous rappelons que la surface libre obtenue avec les théories linéaires des ondes de gravité (les ondes du type des ondes de STOKES) est :

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k)\, e^{i(kx - \sigma(k)\, t)}\, dk$$

où : $\sigma(k) = \sqrt{gk}$ pour les ondes en profondeur infinie

et : $\sigma(k) = \sqrt{gk \text{ th } kd}$ pour les ondes en profondeur finie.

Aux grandes valeurs de t la solution des ondes en profondeur infinie est :

$$\eta(x, t) = \frac{\phi(k_o)\, t\sqrt{g}}{2\sqrt{\pi x^3}} \cos\left(\frac{g t^2}{4x} + \frac{1}{4}\pi\right) + 0\,(1/t) \quad \ldots (6.32)$$

avec : $k_o = \frac{g t^2}{4 x^2}$

Pour obtenir la trajectoire de ces ondes, nous garderons la phase constante, d'où :

$$x = \frac{g}{\pi} t^2$$

Dans le plan (x, t) ces trajectoires sont des paraboles.

La solution en profondeur finie est :

$$\eta(x, t) = \frac{\phi(k_o) \cos\left(k_o x - \sigma(k_o)\, t + \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{t}\right)}{\left\{2\pi t \left| \sigma''(k_o)\right|\right\}^{1/2}} \quad \ldots \quad (6.33)$$

où $k_o\left(\frac{x}{t}\right)$ sera obtenue par l'inversion de l'équation :

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-(g \text{ th } k_o d + g\, k_o d^2 \text{ sech}^2 k_o d)}{(g\, k_o \text{ th } k_o d)^{1/2}} \quad \ldots \quad (6.34)$$

...

Nous savons que cette solution n'est pas satisfaisante lorsque la profondeur est trop faible devant la longueur d'onde. Puisqu'il n'est pas possible d'inverser directement l'équation (6.31), nous analyserons le comportement de cette solution aux faibles valeurs de λ/d c'est-à-dire aux grandes valeurs de kd car $\lambda = 2\pi/k_o$. Lorsque $k_o d$ est très grand, nous avons :

$$\text{th } k_o d \simeq 1$$

$$\text{sech}^2 k_o d \simeq 0$$

Nous avons donc :

$$k_o \simeq \frac{g\, t^2}{4\, x^2}$$

qui, substitué dans la phase obtenue avec la solution linéaire en profondeur finie nous donne :

$$x \simeq \frac{g}{\pi}\, t^2$$

Nous voyons que les trajectoires des ondes en profondeur finie sont pratiquement des paraboles lorsque le rapport λ/d est faible.

La théorie des ondes longues avec courbure n'est utilisable que pour de grandes valeurs de λ/d ; nous analyserons donc le comportement de la solution (équation 6.29) pour de petites valeurs de $k_{o1} d$. Pour ces valeurs, nous obtenons à partir de l'équation de définition de β_1 la relation :

$$\frac{x}{t} \simeq u_o + \sqrt{gd}\,(1 - \frac{1}{2}\, b_1^{\,2}\, d^2)$$

d'où :

$$k_{o1} = \frac{\left\{ 2\,(u_o + \sqrt{gd} - \frac{x}{t}) \right\}^{1/2}}{d\,(gd)^{1/4}}$$

Compte tenu de la valeur de β_1 la phase dans l'équation (6.29) s'écrira :

$$\frac{\left\{ 2\,(u_o + \sqrt{gd} - \frac{x}{t}) \right\}^{1/2}}{d\,(gd)^{1/4}} \left\{ \frac{2}{3}\,(\frac{x}{t} - u_o - \sqrt{gd}) \right\} t - \frac{1}{4}\pi$$

...

Lorsque la phase est constante et égale à 0 nous avons donc :

$$x \simeq (u_o + \sqrt{gd})\, t - \left(\frac{gd}{2}\right)^{1/6} \cdot \left(\frac{3\pi d}{4}\right)^{2/3} t^{1/3}$$

Les trajectoires des ondes obtenues avec la solution (6.29) ne sont pas des paraboles, mais ont quand même une allure parabolique.

3 - CONCLUSIONS

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons vu que les équations des ondes longues avec courbure ne forment pas un système strictement hyperbolique, car il existe deux caractéristiques réelles doubles, ce qui indique un caractère de parabolicité.

Pour déterminer dans quelle mesure ces équations permettent l'étude des phénomènes de propagation, nous les avons linéarisées pour traiter un problème aux conditions initiales. Nous avons montré que ces équations admettent une solution représentant des ondes dispersives, et que ces ondes se propagent avec une célérité qui est très voisine de la vitesse donnée par la pente des caractéristiques des équations des ondes longues sans courbure.

$$C = \frac{dx}{dt} \simeq u_o + \sqrt{gd}$$

Les ondes longues avec courbure se comportent comme les ondes longues sans courbures en ce qui concerne leur propagation.

Nous avons aussi montré le rôle très important joué par les termes contenant les dérivées d'ordre le moins élevé dans les équations des ondes longues avec courbure. C'est en tenant compte des termes d'ordre inférieur dans les équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants et à caractéristiques multiples que GARDING (1951) a étendu le concept d'hyperbolicité à ces équations.

CHAPITRE VII

LES EQUATIONS DU CHOC

Lorsqu'une houle s'approche du rivage l'onde se raidit au fur et à mesure que le tirant d'eau dans lequel se propage la houle diminue. Il arrive un moment où l'amplitude de l'onde devient trop importante comparée au tirant d'eau et cette onde déferle. Il serait intéressant de savoir si les équations des ondes longues avec courbure admettent les discontinuités pour des ondes où l'amplitude est très grande devant le tirant d'eau.

Le phénomène de propagation d'ondes est représenté par les solutions d'équations aux dérivées partielles hyperboliques avec des conditions initiales et des conditions aux limites ; si ces données possèdent des discontinuités la solution sera discontinue. Les solutions des équations quasi-linéaires hyperboliques peuvent développer des discontinuités à partir de conditions initiales continues au bout d'un certain temps. Mathématiquement ces discontinuités se produisent aux points où deux caractéristiques de même famille se coupent.

Les systèmes d'équations aux dérivées partielles strictement hyperboliques ont été étudiés depuis longtemps et de nombreux travaux ont été publiés sur les discontinuités. LAX [1957] a présenté une théorie générale des discontinuités dans les solutions des systèmes conservatifs. Par contre on ne connaît pratiquement rien sur les équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples. GARDING (1951) a donné une définition de l'hyperbolicité qui s'étend aux équations linéaires à coefficients constants et il a défini les conditions nécessaires pour que le problème de CAUCHY soit bien posé. Madame LAX (1956) a étudié les équations aux dérivées partielles linéaires à coefficient réels (constants et variables) ayant des caractéristiques multiples. Elle a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème de CAUCHY soit bien posé et possède une solution. A notre connaissance il n'existe aucune étude sur les équations aux dérivées partielles quasi-linéaires à caractéristiques multiples.

Nous avons vu au chapitre précédent que les équations de première approximation des ondes longues ne présentent pas un caractére hyperbolique strict. Les caractéristiques de ces équations exprimées en variables de LAGRANGE sont doubles et forment un réseau de droites parallèles à Oa et Ot. Les pentes de ces caractéristiques dans le plan (a,t) sont

$$\frac{da}{dt} = o, o, \infty, \infty$$

Deux caractéristiques de même famille ne peuvent jamais se couper et l'étude des caractéristiques des équations des ondes longues avec courbure ne permet pas d'expliquer la formation des chocs observables en nature (déferlement).

Nous avons défini au chapitre VI les pseudo-caractéristiques comme étant les caractéristiques des équations lorsque nous y négligions l'accélération verticale. Ces pseudo-caractéristiques sont donc les caractéristiques des équations de SAINT-VENANT. La pente de ces pseudo-caractéristiques, que nous exprimons ci-dessus en variables de LAGRANGE, est fonction du tirant d'eau $\eta(a,t)$,

$$\text{Pseudo-caractéristiques } C_p^+ : \quad \frac{da}{dt} = \frac{\eta}{h}\sqrt{g\eta}$$

$$\text{Pseudo-caractéristiques } C_p^- : \quad \frac{da}{dt} = -\frac{\eta}{h}\sqrt{g\eta}$$

h est le tirant d'eau à l'instant initial.

Deux pseudo-caractéristiques de même famille peuvent se couper si le tirant d'eau η varie beaucoup entre deux sections très voisines. Au point où deux pseudo-caractéristiques se coupent nous savons que la solution des équations hyperboliques obtenues en négligeant l'accélération verticale (équations de SAINT-VENANT) admet une discontinuité. En remarquant que les équations des ondes longues avec courbure constituent une généralisation des équations de BARRE de SAINT-VENANT lorsque l'accélération verticale à la surface libre est prise en compte ; nous pouvons penser que la solution des ondes longues avec courbure se comporte comme celle des ondes longues sans courbure et admet des discontinuités. Avec l'hypothèse que la solution admet des discontinuités nous allons établir les relations de saut à travers le choc, nous supposerons que ces discontinuités portent sur les fonctions.

1 - LES EQUATIONS DU CHOC EN VARIABLES D'EULER

La solution de première approximation des ondes longues avec courbure (Equations 5.12, 5.14, 5.15) nous donne :

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x,t) \\ v &= -z\,u_x \\ p &= \rho(\eta - z)\left[g + \frac{2}{3}\Gamma\right] \end{aligned}\right\} \qquad (7.1)$$

$\Gamma(x,t)$ représente l'accélération verticale à la surface libre, u et v représentent respectivement les composantes horizontales et verticales de la vitesse et p est la pression.

Considérons le domaine fluide compris entre deux plans verticaux I et II (Fig 7.1) qui sont situés respectivement en

$$x = \varphi_1(t)$$

et $$x = \varphi_2(t)$$

$$\varphi_2 > \varphi_1$$

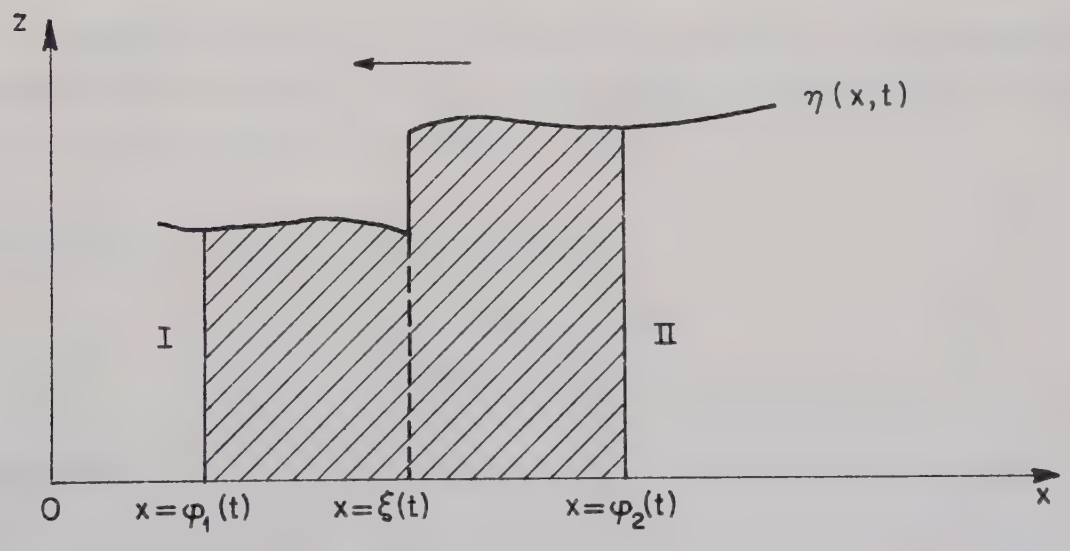


Fig 7.1 : La discontinuité

Ces plans se déplacent aux vitesses respectives

$$u_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$$

$$u_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$$

et puisque la solution de première approximation donne une distribution uniforme des vitesses horizontales dans une section, u_1 et u_2 représentent les composantes horizontales de la vitesse en φ_1 et φ_2 ;

Supposons une disconuité de la surface libre qui se trouve située en :

$$x = \xi(t)$$

tel que $$\varphi_1 \leq \xi \leq \varphi_2$$

et se déplace avec la célérité

$$c = \frac{d\xi}{dt}$$

Exprimons maintenant la conservation de la masse et des quantités de mouvement dans le domaine fluide compris entre les deux plans verticaux I et II, la surface libre et le fond.

- La conservation de la masse s'exprime par :

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{o}^{\eta} \rho \, dz \, dx = 0$$

et nous donne

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \eta(x,t) \, dx = 0 \qquad \ldots\ldots (7.2)$$

- En projection sur Ox la conservation du débit des quantités de mouvement s'exprime par

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{o}^{\eta(x,t)} \rho u \, dz \, dx = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{o}^{\eta(x,t)} \frac{\partial p}{\partial x} \, dz \, dx$$

et nous donne, compte tenu que u est indépendant de z,

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \rho u \eta \, dx = - \int_{o}^{\eta_2} p_2 \, dz + \int_{o}^{\eta_1} p_1 \, dz$$

p_1, p_2, η_1, η_2 représentent respectivement la pression et le tirant d'eau en φ_1 et φ_2.

Substituons la valeur de la pression dans cette équation, nous avons après intégration du second membre

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho u \eta \, dx = - \frac{\rho}{2} \eta_2^2 \left(g + \frac{2}{3} \Gamma_2\right) + \frac{\rho}{2} \eta_1^2 \left(g + \frac{2}{3} \Gamma_1\right)$$

..... (7.3)

Les premiers membres des équations (6.2) et (6.3) sont de la forme

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \theta(x,t) \, dx$$

Mais

$$I = \int_{\varphi_1}^{\xi} \theta(x,t) \, dx + \int_{\xi}^{\varphi_2} \theta(x,t) \, dx$$

Alors

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial \theta}{\partial t} \, dx + \theta(\xi^-, t) \frac{d\xi}{dt} - \theta(\varphi_1, t) \frac{d\varphi_1}{dt} + \theta(\varphi_2, t) \frac{d\varphi_2}{dt} - \theta(\xi^+, t) \frac{d\xi}{dt}$$

où $\theta(\xi_-, t)$ et $\theta(\xi_+, t)$ expriment que nous devons prendre la valeur limite de θ respectivement à gauche et à droite de ξ .

Cette équation s'écrit aussi :

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\partial \theta}{\partial t}\, dx + \theta(\xi_-, t)\, C - \theta(\varphi_1, t)\, u_1 + \theta(\varphi_2, t)\, u_2 - \theta(\xi_+, t)\, C$$

En faisant tendre φ_1 et φ_2 l'un vers l'autre de telle façon que $\varphi_1 < \xi < \varphi_2$, nous avons

$$\lim_{\varphi_1 \to \varphi_2} \frac{dI}{dt} = \theta_2 (u_2 - C) - \theta_1 (u_1 - C)$$

En utilisant ce résultat dans les équations (7.2) et (7.3) il vient

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 (u_1 - C) &= \eta_2 (u_2 - C) \\ \text{et} \quad u_2 \eta_2 \left[u_2 - C\right] - u_1 \eta_1 \left[u_1 - C\right] &= -\frac{1}{2} \eta_2^{\,2} \left(g + \frac{2}{3} \Gamma_2\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta_1^{\,2} \left(g + \frac{2}{3} \Gamma_1\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (7.4)$$

et, en notant $\left[f\right]$ le saut de la fonction f à la discontinuité

$$\left[f\right] = f_2 - f_1$$

nous aurons

$$\left.\begin{aligned} C\left[\eta\right] - \left[u\eta\right] &= 0 \\ \text{et} \quad C\left[u\eta\right] - \left[\eta \left\{ u^2 + \frac{\eta}{2} \left(g + \frac{2}{3} \Gamma\right)\right\}\right] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (7.5)$$

Les équations (7.4) ou leur forme équivalente (7.5) constituent les relations de saut à travers le choc, elles expriment la conservation du volume et des quantités de mouvement pour une tranche d'eau comprenant le choc dans des axes se déplaçant avec le choc.

1.1 Hypothèse pour la résolution des équations du choc.

Ces équations forment un système de 2 équations à 7 inconnues qui sont C, η_1, η_2, u_1, u_2, Γ_1, Γ_2. Nous n'avons pas pu obtenir d'autres relations entre ces inconnues à partir d'hypothèses physiques. Nous remarquerons cependant qu'en supposant $\Gamma = o$ à la discontinuité il est possible de résoudre les équations du choc [7.5]. Avec cette hypothèse ces équations s'écrivent :

$$C\left[\eta\right] - \left[u\eta\right] = 0$$
$$C\left[u\eta\right] - \left[\eta u^2 + \frac{\eta^2}{2} g\right] = 0$$

D'autre part nous pouvons utiliser les invariants de RIEMANN sur les caractéristiques C_+ et C_- des équations de SAINT-VENANT qui sont :

$u + 2\sqrt{g\eta}$ = Cte sur la caractéristique C_+ de pente $\frac{du}{dt} = u + \sqrt{g\eta}$

et $u - 2\sqrt{g\eta}$ = Cte sur la caractéristique C_- de pente $\frac{du}{dt} = u - \sqrt{g\eta}$

Comme dans la théorie des ondes longues sans courbure nous savons qu'au point du plan (x,t) où il existe des discontinuités des fonctions u et η il passe 2 caractéristiques de même famille; en vertu de l'hypothèse que nous avons faite plus haut nous avons à résoudre en ce point les 5 équations suivantes :

$$C\left[u\right] - \left[u\eta\right] = 0$$
$$C\left[u\eta\right] - \left[\eta u^2 + \frac{g\eta^2}{2}\right] = 0$$
$$u_2 + 2\sqrt{g\eta}_2 = \text{Cte}$$
$$u_2 - 2\sqrt{g\eta}_2 = \text{Cte}$$
$$u_1 \pm 2\sqrt{g\eta}_1 = \text{Cte}$$

en prenant dans la dernière équation le signe + pour une onde se propageant de gauche à droite et le signe - pour une onde se propageant dans la direction opposée.

L'idée est donc de raccorder la solution des ondes longues avec courbure de chaque côté d'une discontinuité en déterminant les valeurs des fonctions u et η qui respectent la conservation de la masse et des quantités de mouvement lorsque l'accélération verticale à la surface libre est supposée nulle à cette discontinuité.

2 - LES EQUATIONS DU CHOC EN VARIABLES DE LAGRANGE.

Nous établirons les équations du choc en variables de LAGRANGE en utilisant la théorie des chocs faibles de LAX ; pour la discussion concernant cette théorie nous renvoyons le lecteur à LAX [1957].

Les équations de première approximation des ondes longues avec courbure s'écrivent, en variables de LAGRANGE :

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\,u) + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2}\eta^2\left(g + \frac{2}{3}\Gamma\right)\right) = 0$$

$$\eta\,\frac{\partial x}{\partial a} = h \qquad \ldots (7.6)$$

Γ est l'accélération verticale à la surface libre. Nous mettrons les équations (7.10) sous la forme conservative suivante :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(h\,u) + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2}\eta^2\left(g + \frac{2}{3}\Gamma\right)\right) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h}{\eta}\right) - \frac{\partial}{\partial a}(u) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (7.7)$$

Soit $\mathcal{F}$ le domaine du plan (a,t) dans lequel nous rechercherons la solution de ces équations.

Considérons deux fonctions test arbitrairement choisies ξ_1 et ξ_2 à support compact dans $\mathcal{R}$ contenu dans $\mathcal{F}$. Si on multiplie ces fonctions

respectivement à la première et à la deuxième équation de (7.11) et qu'on intègre sur $\mathcal{R}$, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \xi_1 \left\{ \frac{\partial (h\,u)}{\partial t} + \frac{\partial}{a} \left(\frac{1}{2} \eta^2 \left(g + \frac{2}{3} \Gamma \right) \right) \right\} da\, dt &= 0 \\ \iint_{\mathcal{R}} \xi_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{\eta} \right) - \frac{\partial (u)}{\partial a} \right\} da\, dt &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.8)$$

En remarquant que par définition les fonctions test s'annulent sur le contour de $\mathcal{R}$ le théorème de GREEN permet d'établir que

$$\left.\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \left\{ hu \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \eta^2 \left(g + \frac{2}{3} \Gamma \right) \frac{\partial \xi_1}{\partial a} \right\} da\, dt &= 0 \\ \iint_{\mathcal{R}} \left\{ \frac{h}{\eta} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - u \frac{\partial \xi_2}{\partial a} \right\} da\, dt &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.9)$$

Inversement, tout couple de fonctions (u, η) possédant des dérivées premières continues et vérifiant les équations (7.9) pour toutes les fonctions test (ξ_1, ξ_2) constituera une solution des équations (7.7) car une autre application du théorème de GREEN nous donnera les équations (7.8) et alors l'utilisation d'un lemme du calcul des variations [voir COURANT et HILBERT [1962], Vol 1, ch IV, § 3,1] permet de montrer que

$$\frac{\partial}{\partial t} (h\,u) + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{2} \eta^2 \left(g + \frac{2}{3} \Gamma \right) \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{\eta} \right) - \frac{\partial}{\partial a} (u) = 0$$

et permet donc de retrouver les équations (7.7).

Les équations intégrales (7.9) permettent d'élargir les solutions aux fonctions u et η ne possédant des dérivées permières continues que par morceaux dans $\mathcal{F}$; ces solutions sont dites "solutions faibles". Elles

peuvent donc posséder des discontinuités le long de certaines courbes Σ dans le plan (a,t) qui sont appelées"chocs".

En prenant un support $\mathcal{R}$ des fonctions test, qui soit traversé par un choc et partagé en deux domaines $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, l'application du théorème de GREEN pour des solutions faibles donnent des intégrales de surface qui s'annulent par définition dans $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ et des intégrales curvilignes qui s'annulent également sur le contour de $\mathcal{R}$ mais pas le long de Σ où l'on a

$$\int_{\Sigma} \xi_1 \left\{ \left[u\, h \right] da - \left[\frac{1}{2} \eta^2 \left(g + \frac{2}{3} \right) dt \right] \right\} = 0$$

et

$$\int_{\Sigma} \xi_2 \left\{ \left[\frac{h}{\eta} \right] da - \left[u \right] dt \right\} = 0$$

Nous avons noté $\left[f \right]$ le saut de la fonction f au choc

$$\left[f \right] = f_2 - f_1$$

En appelant σ la vitesse de déplacement du choc dans le plan $\left[a,t \right]$ nous aurons donc

$$\begin{aligned} \sigma \left[u\, h \right] &= \frac{1}{2} \left[\eta^2 \left(g \frac{2}{3} \Gamma \right) \right] \\ \sigma \left[\frac{h}{\eta} \right] &= - \left[u \right] \end{aligned} \qquad \ldots (7.10)$$

et nous donnent les relations de saut des fonctions à travers le choc.

Soit $x(a,t)$ la position au temps t d'une particule qui se trouvait à l'instant initial en $x = a$. Nous appellerons $a_1 = a_1(t)$ l'abscisse à l'instant initial d'une particule atteinte par le choc au temps t . La position du choc sera alors :

$$x_c = x(a_1(t), t)$$

et sa célérité sera

$$C = \frac{d x_c}{dt} = \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}$$

Mais l'équation de continuité nous donne

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{h}{\eta}$$

et nous avons aussi

$$\sigma = \frac{da_1}{dt} \qquad \text{et} \qquad u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

d'où

$$C = \frac{h}{\eta}\sigma + u$$

1.2- Hypothèses pour la résolution des équations du choc

Pour pouvoir résoudre les équations du choc (7.10) nous allons comme au paragraphe (1.1) supposer $\Gamma = 0$ dans ces équations. Nous utiliserons aussi les relations invariantes sur les caractéristiques des équations obtenues en négligeant l'accélération verticale dans les équations des ondes longues avec courbure (7.7) . Nous avons vu au chapitre VI que ces invariants sont :

$u + 2\sqrt{g\eta} = Cte$ sur la caractéristique C^+ de pente $\frac{da}{dt} = \frac{\eta}{h}\sqrt{g\eta}$

et $u - 2\sqrt{g\eta} = Cte$ sur la caractéristique C^- de pente $\frac{da}{dt} = -\frac{\eta}{h}\sqrt{g\eta}$

Pour une onde se propageant de droite à gauche nous aurons donc

$$\left.\begin{aligned} u_2 + 2\sqrt{g\eta_2} &= Cte \\ u_2 - 2\sqrt{g\eta_2} &= Cte \\ u_1 - 2\sqrt{g\eta_1} &= Cte \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \quad (7.11)$$

qui forment avec les équations (7.10) un système de 5 équations à 5 inconnues; lorsque l'accélération verticale au choc est supposée nulle.

TROISIEME PARTIE

ETUDE DE LA HOULE EN EAU PEU PROFONDE

CHAPITRE VIII

LA SOLUTION DE LA HOULE EN EAU PEU PROFONDE

Nous nous intéresserons dans ce chapitre aux ondes qui se propagent sans déformation, c'est-à-dire aux ondes progressives. Nous rechercherons la solution des équations de première approximation des ondes longues avec courbure dans un repère animé d'une vitesse constante de translation en supposant que dans ce repère l'écoulement est permanent. Nous obtiendrons ainsi une solution périodique,qui est la solution de première approximation de la houle en eau peu profonde, dont nous analyserons les propriétés pour les comparer à celles des autres solutions connues de la houle au chapitre IX. Nous obtiendrons aussi la solution de l'onde solitaire.

1 - CALCUL DE LA PREMIERE APPROXIMATION DE LA HOULE EN EAU PEU PROFONDE.

Le système (5.16) représente les équations de première approximation des ondes longues avec courbure exprimées en variables d'EULER. Ce système est identique aux équations (3.11) qui sont la transposition dans ces variables de la première approximation obtenue en variables de LAGRANGE.

Ce système s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\, g + \frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\eta}{3}\frac{\partial\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)}{\partial x} = 0 \\ &v_1 + \eta\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ &v_1 = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u\frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (8.1)$$

où u est une fonction de x et de t.

$$u = u(x, t)$$

Nous obtiendrons la solution des ondes progressives en intégrant ces équations ; nous adopterons désormais un repère animé d'une vitesse constante de translation C dans le sens des x croissants dans lequel l'écoulement sera supposé permanent. Les équations (8.1) admettent les solutions où l'une quelconque des fonctions u, v_1 et η est fonction de la seule variable

$$X = x - Ct$$

Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dX}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} = - C \frac{d}{dX}$$

Dans ce repère galiléen, le système (8.1) devient :

$$U \frac{dU}{dX} + \frac{d\eta}{dX} \left[g + \frac{2}{3} U \frac{dv_1}{dX} \right] + \frac{\eta}{3} \left[\frac{dU}{dX} \cdot \frac{dv_1}{dX} - U \frac{d^2 v_1}{dX^2} \right] = 0$$

$$v_1 + \eta \frac{dU}{dX} = 0 \qquad (8.2)$$

$$v_1 = U \frac{d\eta}{dX}$$

en posant $U(X) = u(x, t) - C$

Les vitesses ne seront connues qu'à une constante près ; ce n'est là qu'une conséquence de la transformation du groupe de GALILEE. pour déterminer la valeur de cette constante nous devrons faire une hypothèse supplémentaire sur la nature de l'écoulement. Nous reviendrons sur cet aspect du problème par la suite.

La résolution des deux dernières équations du système (8.2) nous donne :

$$\frac{d}{dX}(U \eta) = 0$$

d'où

$$U = \frac{q}{\eta} \qquad (8.3)$$

q est une constante d'intégration qui a un sens physique évident : c'est le débit dans une section de largeur unité .

Calculons maintenant v_1

$$v_1 = \frac{q}{\eta} \frac{d\eta}{dX}$$

et substituons sa valeur ainsi que celle de U donnée par (8.3) dans la première équation du système (8.2). Celle-ci se simplifie alors et devient :

$$(g + \frac{q^2}{\eta^3}) \frac{d\eta}{dX} + \frac{1}{3} \frac{q^2}{\eta^3} (\frac{d\eta}{dX})^3 - \frac{2}{3} \frac{q^2}{\eta^2} \frac{d\eta}{dX} \cdot \frac{d^2\eta}{dX^2} + \frac{1}{3} q^2 \frac{d^3\eta}{dX^3} = 0 \qquad \ldots\ldots (8.4)$$

L'intégration de cette équation différentielle du 3ème ordre et du 3ème degré nous donnera l'expression de la surface libre. Pour faire cette intégration remarquons d'abord que :

$$\frac{d\eta}{dX} \cdot \frac{d}{d\eta} \left[\frac{q^2}{\eta} \frac{d^2\eta}{dX^2} - \frac{q^2}{\eta^2} (\frac{d\eta}{dX})^2 \right] = 2 \frac{q^2}{\eta^3} (\frac{d\eta}{dX})^3 - 3 \frac{q^2}{\eta^2} \frac{d\eta}{dX} + \frac{q^2}{\eta} \frac{d^3\eta}{dX^3}.$$

ce qui nous permet de mettre l'équation (8.4) sous la forme

$$3 (g - \frac{q^2}{\eta^3}) + \frac{d}{d\eta} (\frac{q^2}{\eta} \frac{d^2\eta}{dX^2} - \frac{q^2}{\eta^2} (\frac{d\eta}{dX})^2) - \frac{q^2}{\eta^3} (\frac{d\eta}{dX})^2 - \frac{q^2}{\eta^2} \frac{d^2\eta}{dX^2}) = 0$$

qui nous donne

$$\frac{d}{d\eta} (\frac{q^2}{\eta} \frac{d^2\eta}{dX^2} - \frac{q^2}{\eta^2} (\frac{d\eta}{dX})^2) + \frac{d}{d\eta} (\frac{q^2}{2\eta^2} (\frac{d\eta}{dX})^2) = 3 \frac{q^2}{\eta^3} - 3 g$$

Cette équation différentielle s'intègre une fois par rapport à η

$$\frac{q^2}{\eta} \frac{d^2\eta}{dX^2} - \frac{q^2}{2\eta^2} (\frac{d\eta}{dX})^2 = - 3 \frac{q^2}{2\eta^2} - 3 g \eta + C_1$$

et, en utilisant la relation différentielle

$$\frac{d}{d\eta} (\frac{q^2}{\eta} \frac{d\eta}{dX})^2) = 2 \frac{q^2}{\eta} \frac{d^2\eta}{dX^2} - \frac{q^2}{\eta^2} (\frac{d\eta}{dX})^2$$

nous trouvons, après une nouvelle intégration par rapport à η

$$\frac{q^2}{\eta}\left(\frac{d\eta}{dX}\right)^2 = 3\frac{q^2}{\eta} - 3g\eta^2 + 2C_1\eta + C_2$$

C_1 et C_2 étant des constantes d'intégration.

Cette équation devient, après multiplication des deux membres par $\eta/3g$

$$\frac{q^2}{3g}\left(\frac{d\eta}{dX}\right)^2 = -\eta^3 + \frac{2C_1}{3g}\eta^2 + \frac{C_2\eta}{3g} + \frac{q^2}{g} \qquad \ldots\ldots (8.5)$$

Nous supposerons que le second membre, qui est un polynome du troisième degré, possède trois racines réelles notées h_o, h_1 et h_2 ($h_1 \geq h_o \geq h_2$) - sinon η pourrait devenir infini, ce qui est physiquement inacceptable.
Ces trois racines devront satisfaire à la relation

$$h_o\, h_1\, h_2 = \frac{q^2}{g}$$

d'où nous tirons

$$h_2 = \frac{q^2}{g\, h_o\, h_1}$$

Posons $\sqrt{\frac{q^2}{3g}} = \frac{1}{\beta}$

nous avons alors

$$\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{d\eta}{dX}\right)^2 = (\eta - h_o)(h_1 - \eta)(\eta - h_2)$$

En séparant les variables nous ramènerons cette équation à l'intégrale elliptique

$$\int_h^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta - h_o)(h_1 - \eta)(\eta - h_2)}} = \varepsilon\beta x$$

où $\varepsilon = \pm 1$

Nous ferons le changement de variable

$$f = \eta - h_o$$

en posant

$$a = h_1 - h_o$$

et $$k = h_o - h_2$$

il vient

$$\int_o^f \frac{df}{\sqrt{f\,(a-f)\,(k+f)}} = \varepsilon \beta X$$

Posons alors $f = a \cos^2 \theta$

nous avons

$$\int_o^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (\frac{a}{a+h}) \sin^2\theta}} = \varepsilon \gamma X$$

avec $$\gamma = \beta \frac{\sqrt{a+k}}{2}$$

Nous avons ainsi mis l'intégrale elliptique sous la forme normale de LEGENDRE.

D'où

$$cn(\varepsilon \gamma X, m) = \cos \theta$$

avec $$m = \frac{a}{a+k}$$

m est le paramètre de la fonction elliptique de JACOBI cn

En remarquant que

$$cn\ (\ \mu\ ,\ m) \ = \ cn\ (-\ \mu\ ,\ m)$$

il vient :

$$\boxed{\frac{\eta\ (x,t)}{h_o} \ = \ 1 + \frac{a}{h_o}\ \ cn^2(\ \gamma\ (x - Ct),\ m)} \qquad \ldots\ldots\ (8.6)$$

qui nous donne le profil de la houle en première approximation ; h_o est le tirant d'eau minimum et a est l'amplitude de la houle (Fig. 8.1)

Nous avons aussi

$$\gamma = \sqrt{\frac{3\ a\ g}{4\ q^2\ m}}$$

et

$$m \ = \ \frac{g\ (a+h_o)\ a\ h_o}{\left[g\ (a+h_o)^2\ h_o - q^2\right]}$$

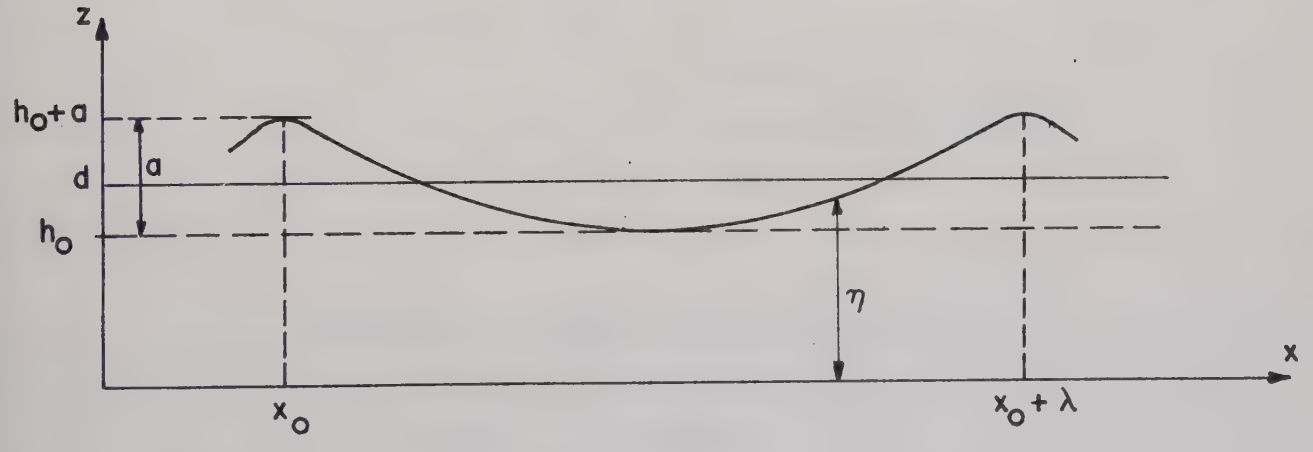


Fig 8.1 : Coupe longitudinale instantanée dans la houle

Afin de compléter la solution nous allons maintenant déterminer la valeur de la célérité. Pour cela nous aurons à faire une hypothèse supplémentaire sur la nature de l'écoulement. Nous supposerons que le débit moyen de masse de l'écoulement à travers une section verticale de largeur unité est nul. Ceci revient à définir la célérité comme étant la vitesse constante de translation qui annule le débit de quantité de mouvement, pris en moyenne sur une longueur d'onde, d'une houle observée dans un repère galiléen.

Remarquons cependant, qu'en raison de la distribution uniforme des vitesses horizontales dans une section qui nous est donnée par cette approximation, toutes les définitions de la célérité qui consistent à annuler en moyenne la vitesse absolue des molécules passant en un point fixe (x_o, z_o) quelconque dans le fluide se ramènent à la définition de la célérité que nous avons adoptée et qui nous donne

$$\int_o^{\eta} \int_o^{\lambda} (U(X) + C)\, dX\, dz = 0$$

c'est-à-dire

$$C = - \frac{\int_o^{\eta} \int_o^{\lambda} q/\eta \, dX\, dz}{\int_o^{\eta} \int_o^{\lambda} dX\, dz}$$

Le tirant d'eau moyen dans le canal est

$$d = \frac{1}{\lambda} \int_o^{\lambda} \eta(X)\, dX$$

Nous trouvons alors

$$C = - q/d$$

d'où $q = -C\,d$

λ est la longueur d'onde qui vaut

$$\lambda = \frac{2\,K(m)}{\gamma} \qquad \ldots\ldots\ldots (8.7)$$

puisque la fonction elliptique de JACOBI $cn^2(\gamma X, m)$ est de période $2\,K(m)$, où $K(m)$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce.

Nous calculerons aussi le tirant d'eau moyen pour trouver

$$d = h_o + \frac{a}{m}\left[\frac{E(m)}{K(m)} + m - 1\right] \qquad \ldots\ldots\ldots (8.8)$$

$E(m)$ étant l'intégrale elliptique complète de deuxième espèce.

Nous avions

$$m = \frac{a}{h_1 + h_2} = \frac{a}{(a+h_o) - \dfrac{(Cd)^2}{g\,h_o\,(a+h_o)}}$$

il vient alors

$$\frac{C^2\,d^2}{g\,h_o} = \left[a^2\,(1 - 1/m) + a\,h_o\,(2 - 1/m) + h_o^{\,2}\right]$$

d'où

$$\frac{C}{\sqrt{gh_o}} = \frac{\sqrt{(a^2\,(1 - 1/m) + a\,h_o\,(2 - 1/m) + h_o^{\,2})}}{\left[h_o + \frac{a}{m}\,\frac{E(m)}{K(m)} + m - 1\right]} \qquad \ldots\ldots (8.9)$$

La composante horizontale de la vitesse en repère galiléen est :

$$U(X) = \frac{\mathcal{A}}{\eta(X)}$$

nous obtiendrons la vitesse horizontale absolue en faisant

$$u(x, t) = U(x - Ct) + C$$

d'où

$$\frac{u(x,t)}{\sqrt{g\,h_o}} = \sqrt{a^2(1-1/m) + a\,h_o\,(2-1/m) + h_o^2}\left[\frac{1}{\left(h_o + \frac{a}{m}\left(\frac{E(m)}{K(m)} + m - 1\right)\right)} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{\left(h_o + a\,cn^2\,(\gamma(x - Ct), m)\right)}\right] \qquad \ldots\ldots (8.10)$$

Pour compléter la solution il nous reste à calculer la pression ainsi que la composante verticale de la vitesse.

L'équation (5.14) nous donne l'expression de la vitesse en première approximation

$$\frac{p(x,z,t)}{\rho g} = (\eta - z)\left(g + \frac{2}{3}\,\Gamma\right)$$

où $$\Gamma(x,t) = \frac{\partial v_1}{\partial t} + u\,\frac{\partial v_1}{\partial x}$$

représente l'accélération verticale à la surface libre, et s'écrit, dans un système galiléen.

$$\Gamma(X) = U\,\frac{dv_1}{dX}$$

Mais

$$v_1 = U\,\frac{d\eta}{dX}$$

en substituant ces valeurs dans l'expression de la pression nous trouvons, tous calculs faits

$$\frac{p(x,z,t)}{\rho g\,h_o} = \left(1 + \frac{a}{h_o}\,cn^2\,(\gamma\theta, m) - \frac{z}{h_o}\right)\left\{1 + \frac{2\,h_o}{3}\right.$$

$$\frac{\left[a^2\,(1-1/m) + a\,h_o(2-1/m) + h_o^2\right]}{\left[h_o + a\,cn^2\,(\gamma\theta, m^2)\right]}$$

$$\cdot\left[\left[2\,a\,\gamma^2\,(m - 1 + 2\,(1-2\,m)\,cn^2\,(\gamma\theta,m) + 3\,m\,\,cn^4(\gamma\theta, m)\right]\right.$$

$$\left. - \frac{(2\,a\,\gamma\,cn\,(\gamma\theta,m)\,sn\,(\gamma\theta,m)\,dn\,(\gamma\theta,m))^2}{(h_o + a\,cn^2\,(\gamma\theta,m))} \right\} \qquad \ldots\ldots (8.11)$$

avec $\theta = x - Ct$

L'équation (5.15) nous donne l'expression de la vitesse verticale

$$v(x, z, t) = - z U_x$$

d'où nous obtenons

$$\frac{v(x,z,t)}{\sqrt{g h_o}} = - z \frac{\sqrt{a^2 (1-1/m) + a h_o (2-1/m) + h_o^2}}{\left[h_o + a \, cn^2 (\gamma \theta, m) \right]} \cdot \left\{ 2 a \gamma \, cn(\gamma\theta,m) \; sn(\gamma\theta,m) \; dn(\gamma\theta,m) \right\} \quad .... (8.12)$$

Les équations (8.6) à (8.12) constituent la solution complète de la houle cnoïdale en première approximation. Nous remarquerons que dans cette solution l'écoulement se fait par tranches, la vitesse verticale varie linéairement avec la profondeur et la distribution de la pression dans une section est linéaire mais non pas hydrostatique.

2 - LA SOLUTION DE L'ONDE SOLITAIRE EN PREMIERE APPROXIMATION

Lorsque le paramètre des fonctions elliptiques de JACOBI est égal à l'unité, ces fonctions deviennent

$$cn(\mu, 1) = \frac{1}{ch\,\mu}$$

$$sn(\mu, 1) = th\,\mu \qquad (8.13)$$

$$dn(\mu, 1) = \frac{1}{ch\,\mu}$$

et l'équation (8.6) nous donne

$$\frac{\eta}{h_o} = 1 + \frac{a}{h_o \, ch^2 \gamma\theta} = 1 + \frac{a}{h_o} \, sech^2 \, \gamma\theta \quad ..... (8.14)$$

qui est l'équation du profil de l'onde solitaire de BOUSSINESQ et RAYLEIGH. En substituant les relations (8.13) dans les équations (8.10) à (8.12), et en remarquant que pour $m = 1$ les intégrales elliptiques complètes de première et de deuxième espèce valent

$$K(1) = \infty$$
$$E(1) = 1 \qquad (8.15)$$

nous avons

$$\frac{u(x,t)}{\sqrt{gh_o}} = \sqrt{h_o(a+h_o)}\left(\frac{a}{h_o(a+h_o\,ch^2\gamma\theta)}\right) \quad .. (8.16)$$

$$\frac{v(x,z,t)}{\sqrt{gh_o}} = -z\sqrt{h_o(a+h_o)}\cdot\frac{2a\gamma\,th\,\gamma\theta}{(a+h_o\,ch^2\gamma\theta)} \quad .. (8.17)$$

et

$$\frac{p(x,z,t)}{\rho g h_o} = \left(\frac{a-(z-h_o)\,ch^2\gamma\theta}{h_o\,ch^2\gamma\theta}\right)\left\{1+\frac{4}{3}\,\frac{a\gamma h_o^2(a+h_o)\,ch^2\gamma\theta}{(a+h_o\,ch^2\gamma\theta)}\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{3\gamma}{ch^4\gamma\theta}-\frac{2}{ch^2\gamma\theta}-\frac{th\,\gamma\theta}{(a+h_o)\,ch^2\gamma\theta}\right)\right\} \quad .. (8.18)$$

Nous avons obtenu, comme cas limite de la solution cnoïdale, la première approximation de l'onde solitaire. En utilisant les relations (8.15) dans les équations (8.7) et (8.8) nous aurons

$$\lambda = \infty$$
et
$$d = h_o$$

le tirant d'eau moyen est donc égal au tirant d'eau minimum, ce qui est normal puisque la longueur de l'onde est infinie.

En faisant $m = 1$ dans l'équation (8.9) nous trouvons

$$\frac{C}{\sqrt{gh_o}} = \sqrt{1 + \frac{a}{h_o}}$$

nous remarquerons que pour l'onde solitaire nous avons toujours

$$C \geq \sqrt{gh_o}$$

donc $$C \geq \sqrt{gd}$$

Nous avons ainsi obtenu la solution complète de l'onde solitaire en première approximation.

CHAPITRE IX

COMPARAISON NUMERIQUE DES DIVERSES THEORIES DE LA HOULE EN EAU PEU PROFONDE

1 - INTRODUCTION

Ayant obtenu au chapitre VIII une solution de la houle en eau peu profonde, il est intéressant de comparer cette solution aux autres solutions connues de la houle. Cette comparaison ne peut pas se faire littéralement, surtout quand il s'agit de comparer les solutions cnoïdales aux solutions sinusoïdales (houle de STOKES), car il n'existe pas de relations entre les fonctions elliptiques de JACOBI et les fonctions circulaires. Pour cette raison nous comparerons numériquement les diverses solutions de la houle en eau peu profonde.

Nous comparerons entre elles les solutions suivantes :

(i) La solution de première approximation de la houle en eau peu profonde obtenue au premier paragraphe du chapitre VIII et qui sera appelée dans ce qui suit : "solution de SERRE".

(ii) La solution cnoïdale de KORTEWEG et DE VRIES (1895) qui est identique à la solution de KELLER (1948) et que nous appellerons "solution cnoïdale de première approximation".

(iii) La solution cnoïdale de deuxième approximation de LAITONE (1960).

(iv) La solution de troisième approximation de la houle de STOKES (1880) en profondeur finie.

Les solutions de la houle cnoïdale de KELLER et de LAITONE ont été obtenue par la méthode de perturbation de FRIEDRICHS (1948) dont nous avons déjà vu les particularités. La solution de la houle de STOKES que nous avons utilisée est classique et nous renvoyons le lecteur pour les détails de cette solution à STOKES (1880), DE (1955) ou LAITONE (1962). Il nous semble cependant important de préciser que toutes ces solutions

s'obtiennent par une méthode de perturbations encore appelée méthode des petits paramètres ; les petits paramètres utilisés pour faire la perturbation étant $\sigma = \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2$ pour les solutions cnoïdales de KELLER et LAITONE ET $\varepsilon = \frac{a}{x}$ pour la solution de troisième approximation de la houle de STOKES. Les paramètres σ et ε caractérisent respectivement les solutions cnoïdales (solutions de la houle en eau peu profonde) et les solutions de la houle de STOKES (solutions en profondeur finie ou infinie) ; par conséquent le plan le plus indiqué pour la comparaison de ces diverses solutions est le plan où l'on porte en abscisse le paramètre des ondes longues $\sqrt{\sigma}$ et en ordonnée le paramètre de la houle de STOKES ε.

L'étude numérique de la solution cnoïdale de deuxième approximation (LAITONE) et de la solution de troisième approximation de la houle de STOKES permet de définir les limites des domaines d'utilisation de ces solutions. Ces domaines seront définis dans deux plans : le plan $(\sqrt{\sigma}, \varepsilon)$ et le plan de LITTMAN (1957).

Le plan de LITTMAN est classique ; on porte en abscisse le rapport $C/\sqrt{gd}$ et en ordonnée a/d, C étant la célérité. Plusieurs auteurs dont LITTMAN et GOUYON (1958) ont utilisé ce plan pour définir le domaine d'existence de la houle cnoïdale et celui de la houle de STOKES (Fig 9.1). Les limites données par ces auteurs n'ont qu'une valeur indicative car les rayons de convergence des séries résolutives de ces théories de la houle ne sont pas connus. Pour la houle de STOKES GOUYON a donné une minorante de ce rayon.

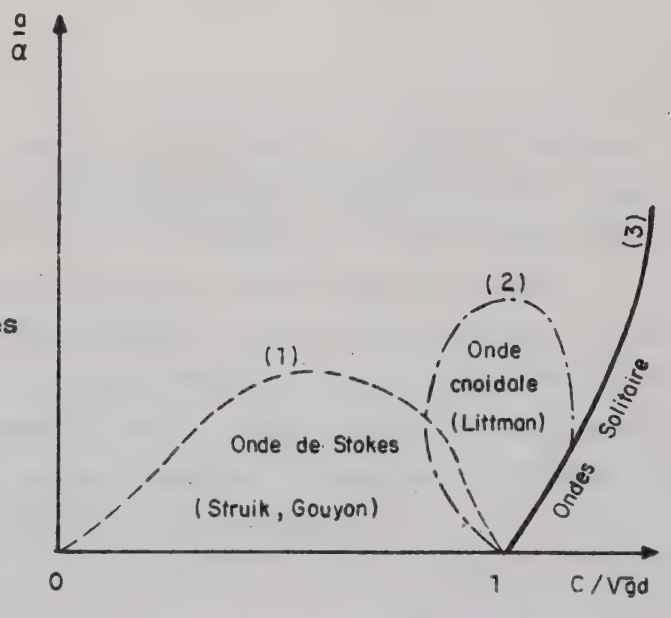


Fig. 9.1 - Le graphique de LITTMAN

Avant de discuter du graphique de LITTMAN, il faut donner une définition. Il existe plusieurs façons de définir la célérité d'une onde (KRAVTCHENKO, STOKES, BIESEL), dans cette étude nous l'avons définie comme la vitesse qui annule le débit de quantité de mouvement, en moyenne sur une longueur d'ondes pour une houle observée dans un repère galiléen ; cette

définition étant utilisée dans toutes les solutions que nous étudierons. Quelle que soit la définition de la célérité on retrouve toujours pour une houle de STOKES une célérité de la forme :

$$C = C_o + \sum_{n=1}^{k} C_n$$

où

$$C_n = f_n(a, \lambda) \qquad (n = 1, 2, \ldots\ldots, k)$$

et

$$C_o = \sqrt{\frac{gd}{Q}\ th\ Q} \qquad Q = \frac{2\lambda d}{\lambda} \quad \text{(AIRY)}$$

Pour une onde longue, c'est-à-dire une onde se propageant en eau peu profonde, d/λ est petit et

$$C_o \# \sqrt{gd}$$

on appelle vitesse critique la vitesse

$$C_o = \sqrt{gd}$$

Le graphique de LITTMAN montre que la houle de STOKES a toujours une vitesse sub-critique [STRUIK (1926)], alors que la houle cnoïdale peut avoir des célérités aussi bien sub que super-critique ; la plus grande célérité étant celle de l'onde solitaire qui est toujours super-critique [RUSSELL (1884)]. LITTMAN n'a pas pu préciser si les deux domaines - celui de la houle de STOKES et celui de la houle cnoïdale - se recouvraient ou non. Il a seulement précisé que la courbe (2) était tangente à la courbe (3) au point (1, 0) et à l'axe $C/\sqrt{gd}$ au voisinage de ce même point. GERMAIN (1967) a montré que ces deux théories ont un domaine commun non nul.

2 - ETUDE NUMERIQUE COMPARATIVE DES DIFFERENTES SOLUTIONS DE LA HOULE.

Nous avons comparé, à l'ordinateur (CDC 6600), la solution de SERRE aux solutions cnoïdales de KELLER et LAITONE ainsi qu'à la solution de troisième approximation de la houle de STOKES pour les longueurs d'ondes relatives suivantes :

$$\frac{\lambda}{d} = 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 15,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$$

tous les autres paramètres de la houle étant gardés constants. Pour chacune de ces longueurs d'onde, nous avons étudié ces solutions pour les amplitudes relatives suivantes :

$$\frac{a}{d} = 0,\ 2\ ;\ 0,\ 4\ ;\ 0,\ 6\ ;\ 0,\ 8$$

Pour chaque couple de ces paramètres, nous avons calculé en 50 sections équidistantes réparties sur une demie longueur d'onde :

- la surface libre (η/d)
- la composante horizontale de la vitesse ($\frac{u}{\sqrt{gd}}$)
- la composante verticale de la vitesse ($\frac{v}{\sqrt{gd}}$)
- la pression ($\frac{p}{\rho gd}$)

ces trois derniers paramètres étant calculés en 10 points équidistants sur chaque section.

Pour chaque houle nous avons aussi calculé :

- la célérité ($\frac{c}{\sqrt{gd}}$) dont la définition donnée plus haut a été utilisée pour toutes les solutions.
- la période $T = \left(\frac{\lambda}{d}\right) / \left(\frac{c}{\sqrt{gd}}\right)$
- le tirant d'eau minimum (h/d)
- la vitesse horizontale maximale moyenne ($\frac{U\ max}{\sqrt{gd}}$) : obtenue en intégrant la composante horizontale de la vitesse en crête entre la surface libre et le fond et en divisant cette somme par le tirant d'eau dans cette section.
- la vitesse horizontale minimale moyenne ($\frac{U\ min}{\sqrt{gd}}$) : obtenue en opérant comme précédemment dans une section située au creux de l'onde.

- les vitesses verticales maximales et minimales moyennes ($\frac{V\ max}{\sqrt{gd}}$, $\frac{V\ min}{\sqrt{gd}}$) obtenues aussi par intégration mais sur des sections situées aux points $\eta = d$ de chaque côté de la crête.

Les planches ainsi que les figures numérotées en chiffre romains auxquelles nous nous réfèrerons dans ce chapitre se trouvent en annexe.

2.1 - La surface libre

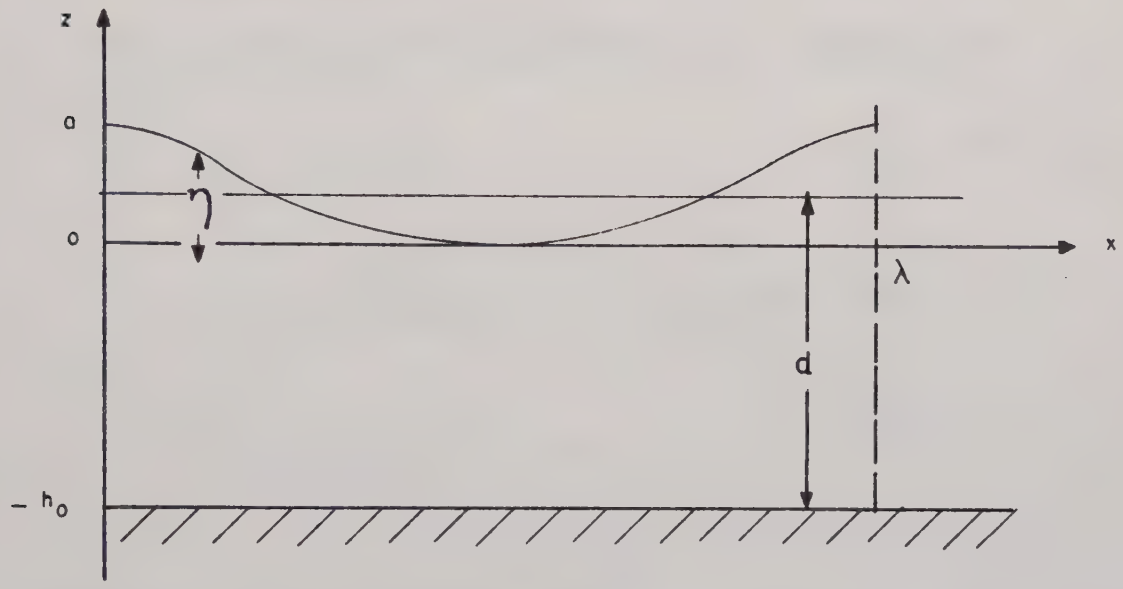


Fig (9.2) : Coupe longitudinale instantanée dans la houle.

En prenant l'origine des côtes au creux des ondes la surface libre a pour expression dans les différentes solutions de la houle.

- houle cnoïdale de première approximation (KDV - KELLER)

$$\frac{\eta(x - Ct)}{h_o} = \frac{a}{h_o}\, cn^2 \left(\alpha \left[x - Ct\right], m\right) + 0\left(\frac{a}{h_o}\right)^2$$

avec $$\alpha = \frac{1}{h_o}\sqrt{\frac{3\,a}{4\,m\,h_o}}$$

- houle cnoïdale de deuxième approximation (LAITONE)

$$\frac{\eta(x - Ct)}{h_o} = \frac{a}{h_o}\, cn^2 \left(\beta \left[x - Ct\right], m\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{a}{h_o}\right)^2 cn^2 \left(\beta \left[x - Ct\right], m\right).$$
$$. \left(1 - cn^2 \left(\beta \left[x - Ct\right], m\right)\right) + 0\left(\frac{a}{h}\right)^3$$

avec $$\beta = \frac{1}{h_o}\sqrt{\frac{3\,a}{4\,m\,h_o}}\left[1 - \frac{a}{h_o}\,\frac{(7\,m-2)}{8\,m}\right]$$

- solution de SERRE

$$\frac{\eta\,(x - Ct)}{h_o} = \frac{a}{h_o}\,cn^2\left(\gamma\left[x - Ct\right], m\right)$$

où $$\gamma = \frac{1}{h_o}\sqrt{\frac{3\,a}{4\,m\,h_o}} \cdot \left[\sqrt{\frac{h_o^2}{(a_2\,(1 - 1/m) + a\,h_o\,(2 - 1/m) + h_o^2)}}\right]$$

- houle de STOKES de 3ème approximation (Cf : LAITONE (1962))

$$\frac{\eta}{d} = \frac{b}{d}\left[1 + \frac{b^2\,Q^2}{8\,h_o^2\,sh^4\,Q}\left(ch^4\,Q + 3\,ch^2\,Q - \frac{3}{2} - \frac{1}{ch^2\,Q}\right)\cos\left(\frac{Q}{h_o}\left[x - Ct\right]\right)\right.$$

$$+ \frac{1}{4}\,\frac{b^2\,Q}{d\,h_o\,ch\,Q\,sh\,Q}\,\frac{(2\,ch^2\,Q + 1)}{th^2\,Q}\cos\left(2\,\frac{Q}{h_o}\left[x - Ct\right]\right)$$

$$\left. + \frac{3\,b^3\,Q^2\,(1 + 8\,ch^6\,Q)}{64\,h_o^2\,d\,sh^6\,Q}\cos\left(3\,\frac{Q}{h_o}\left[x - Ct\right]\right)\right)$$

avec $$Q = \frac{2\,\pi\,h_o}{\lambda}$$

et $$d = h_o\,\frac{2\,\pi\,b^2}{4\,\lambda\,sh\,Q\,ch\,Q} \qquad \ldots (9.1)$$

où b est racine réelle de l'équation du 3ème degré

$$\frac{b^3\,Q^2}{h_o^2 sh^4\,Q}\left[\frac{3}{8}\,\frac{(1 + 8\,ch^6\,Q)}{sh^2\,Q} + ch^4\,Q + 3\,ch^2\,Q - \frac{3}{2} - \frac{1}{ch^2\,Q}\right] + b = \frac{a}{2}$$

Dans cette étude nous avons exprimé la surface libre des solutions cnoïdales sous la forme $\frac{\eta\,(x - Ct)}{d}$. Les relations entre h_o et d dans ces différentes solutions sont :

- houle cnoïdale de première approximation

$$\frac{d}{h_o} = 1 + \left(\frac{a}{h_o}\right) \frac{1}{m}\left[\frac{E(m)}{K(m)} + m - 1\right] + 0\left(\frac{a}{h}\right)^2$$

- houle cnoïdale de deuxième approximation

$$\frac{d}{h_o} = 1 + \left(\frac{a}{h_o}\right) \frac{1}{m}\left[\frac{E(m)}{K(m)} + m - 1\right] + \frac{1}{4m^2}\left(\frac{a}{h_o}\right)^2 \left[\frac{E(m)}{K(m)}(m-2) + 2(1-m)\right] + 0\left(\frac{a}{h_o}\right)^3$$

- solution de SERRE

$$\frac{d}{h_o} = 1 + \left(\frac{a}{h_o}\right) \frac{1}{m}\left[\frac{E(m)}{K(m)} + m - 1\right]$$

Nous remarquerons que pour $m = 1$, toutes ces solutions donnent $h_o = d$, c'est-à-dire que pour l'onde solitaire, le tirant d'eau minimum est égal au tirant d'eau moyen. Nous obtiendrons le profil de l'onde solitaire en faisant $m = 1$ et cu $(\mu, 1) = \frac{1}{\operatorname{ch}\mu}$ dans les équations cnoïdales Il n'est pas possible de retrouver la solution de l'onde solitaire de BOUSSINESQ et RAYLEIGH à partir de la solution de la houle de STOKES.

Les courbes correspondant à ces surfaces libres pour chaque couple $\left(\frac{a}{d}, \frac{\lambda}{d}\right)$ se trouvent sur les planches 1 à 9 (en annexe). Sur chaque planche on trouvera les surfaces libres calculées pour 4 amplitudes relatives : 0, 2 ; 0, 4 ; 0,6 et 0, 8 et une longueur d'onde constante.

Les surfaces libres de la solution cnoïdale de première approximation et de la solution de SERRE n'ont pas été calculées pour les très fortes amplitudes relatives aux longueurs d'onde 40 et 50 car la mémoire de l'ordinateur utilisé ne permet pas d'avoir plus de 15 chiffres significatifs pour un nombre exprimé en mode flottant. Comme le calcul du paramètre m des fonctions elliptiques de JACOBI se fait par une méthode itérative et que dans ces cas le paramètre des fonctions elliptiques est tellement voisin de 1 que $(1 - m) < 1.10^{-15}$, il nous aurait fallu faire tous les calculs en mode "double-précision", ce qui aurait entrainé un doublement du nombre de mémoires utilisées pour le calcul de ces solutions.

En ce qui concerne la forme de la surface libre, nous constatons que les différentes théories cnoïdales donnent des profils extrêmement voisins, ces courbes étant pratiquement confondues aux faibles amplitudes relatives. Aux fortes amplitudes relatives, la solution de SERRE reste extrêmement voisine de la solution cnoïdale de deuxième approximation alors que la solution cnoïdale de première approximation présente des écarts plus importants avec ces solutions.

Nous constatons qu'aux faibles courbures la surface libre de la houle de STOKES est très voisine de celles des solutions cnoïdale , mais qu'elle s'en écarte très vite lorsque la cambrure croît. Pour des cambrures trop élevées les coefficients de la 2ème et de la 3ème harmonique se mettent à croître, ce qui donne un profil présentant des crêtes secondaires.

L'équation (9.1) s'écrit

$$d = h_o + e \quad \text{avec} \quad e = \frac{-2\pi b^2}{4\lambda \operatorname{sh} Q \operatorname{ch} Q}$$

d'où $$Q \frac{d}{h_o} = Q + e \frac{Q}{h}$$

Nous avons

$$\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{Q d}{h_o}\right) = \operatorname{ch}\left(Q + e\frac{Q}{h}\right)$$

$$= \operatorname{ch} Q + e \frac{Q}{h_o} \operatorname{sh} Q + 0\left(\frac{b}{\lambda}\right)^4$$

de même

$$\operatorname{sh}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) = \operatorname{sh} Q + e \frac{Q}{h_o} \operatorname{ch} Q + 0\left(\frac{b}{\lambda}\right)^4 \quad \text{et} \quad \operatorname{th}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) = \operatorname{th} Q \left(1 + \frac{eQ}{h_o \operatorname{sh} Q \operatorname{ch} Q}\right.$$

$$\left. + 0\left(\frac{b}{\lambda}\right)^4\right)$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de la surface libre nous aurons, pour les grandes valeurs de λ

$$\lambda \gg d \quad ; \quad \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) \# 1, \quad \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) \# \frac{2\pi d}{\lambda}$$

$$\frac{\eta^*}{d} \# \frac{b}{d} \cos\theta + \frac{3}{4}\left(\frac{b}{d}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{2\pi d}\right)^2 \cos 2\theta + \frac{27}{64}\left(\frac{b}{d}\right)^3 \left(\frac{\lambda}{2\pi d}\right)^4 \cos 3\theta + 0\left(\frac{b^4 \lambda^6}{d^{10}}\right)$$

avec $$\theta = \frac{Q}{h_o}(x - Ct)$$

et $$\frac{\eta^*}{d} = \frac{\eta}{d} - \frac{e}{d}$$

Nous voyons que plus le rapport d/λ est petit, plus les termes de deuxième et de troisième harmoniques deviennent élevés ; c'est ce qui cause la formation de ces crêtes secondaires sur les planches 7 à 9 correspondant aux houles de grande longueur d'ondes relatives.

Lorsque apparaissent ces crêtes secondaires, non conformes à l'expérience, la théorie de STOKES ne doit plus être utilisée. MICHE (1944), en imposant une courbure nulle au creux, a essayé de définir la cambrure limite d'une houle du 2ème ordre.

2.2 - Les vitesses

2.2.1 - Les vitesses horizontales absolues

La composante horizontale de la vitesse a pour expression, dans les différentes solutions :

- houle cnoïdale de première approximation (KDV - KELLER)

$$\frac{u(x,t)}{\sqrt{gh_o}} = \frac{a}{h_o}\left[\frac{1}{m}\left[1 - \frac{E(m)}{K(m)} - m\right] + cn^2\left(\alpha\left[x - Ct\right], m\right)\right] + 0\left(\frac{a}{h_o}\right)^2$$

- houle cnoïdale de deuxième approximation (LAITONE)

$$u(x,z,t) = F + \frac{a}{h_o}\left[\left(1 - \frac{a}{h_o}\left(\frac{7m-2}{4m}\right)\right] cn^2\left(\beta\left[x-Ct\right],m\right) + \frac{5}{4}\frac{a}{h_o} cn^4\left(\beta\left[x-Ct\right],m\right)$$

$$+ \frac{3}{2}\frac{a^2}{h_o^2}\left(2z/h_o + \frac{z^2}{h^2}\right)\left[\frac{1}{2}(1-1/m) - (2-1/m)\, cn^2\left(\beta\left[x-Ct\right],m\right)\right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} cn^4\left(\beta\left[x-Ct\right], m\right)\right]$$

Avec

$$F = \frac{a}{m\,h_o}\left[1 - \frac{E(m)}{K(m)} - m\right] + \frac{1}{m^2}\left(\frac{a}{h_o}\right)^2\left[\frac{E(m)}{K(m)}\left(\frac{E(m)}{K(m)} + \frac{3\,m}{4} - 1\right) + \frac{1}{2}(m-1)\right]$$

- Solution de SERRE

$$\frac{u(x,t)}{\sqrt{gh_o}} = \sqrt{a^2(1-1/m) + ah_o\,(2-1/m) + h_o^2}\left[\frac{1}{h_o + \frac{a}{m}\left[\frac{E(m)}{K(m)} + m - 1\right]} - \frac{1}{h_o + a\,cn^2\left(\gamma\left[x - Ct\right], m\right)}\right]$$

- houle de STOKES de troisième approximation

$$\frac{u(x,z,t)}{\sqrt{gd}} = b\,\frac{Q}{h_o}\,\frac{C_r}{sh\,Q}\,ch\left(Q\left[1 + z/h_o\right]\right)\cos\theta + \frac{3}{32}\,\frac{C_r b^2 Q^2}{h_o^2 sh^4 Q}\,ch\left(2\,Q\left[1+\frac{z}{h_o}\right]\right)\cos 2\theta + \frac{3}{64}\,\frac{C_r b^3 Q^2}{h_o^3}\left(\frac{13-4ch^2 Q}{sh^7 Q}\right)ch\left(3\,Q\left[1 + z/h_o\right]\right)\cos 3\theta$$

avec $$C_r = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi d}\,th\,Q}$$

La solution de SERRE donne une distribution uniforme des vitesses horizontales dans une section comme la solution cnoïdale de première approximation de KURTEWEG et DE VRIES -KELLER. La composante horizontale de la vitesse dépend de la profondeur dans la solution cnoïdale de deuxième approximation et dans la solution de troisième approximation de la houle de STOKES.

Nous avons tracé sur les figures II (a) à (d) l'évolution de la vitesse horizontale minimale moyenne pour λ /d variant de 4 à 50 et $(\frac{a}{d})$ variant de 0,2 à 0,8. Nous voyons sur ces graphiques qu'aux faibles amplitudes les valeurs données pour les théories cnoïdale de première et de deuxième approximation sont très voisines, l'écart entre ces solutions allant en diminuant lorsque la longueur d'onde croît, ce qui est normal car on tend alors vers une distribution uniforme des vitesses. Pour des amplitudes plus

élevées l'écart devient important. Nous constaterons aussi sur les figures II (c) et (d), que pour des longueurs d'onde relatives inférieures à 10, les courbes de vitesses minimales moyennes pour ces deux solutions divergent très rapidement.

La solution de SERRE donne des vitesses minimales moyennes presque identiques à celles obtenues avec la solution cnoïdale de deuxième approximation.

Sur les figures III (a) à (d), nous avons tracé l'évolution de la vitesse horizontale maximale moyenne pour des longueurs d'ondes relatives variant de 4 à 50 et une amplitude relative variant de 0,2 à 0,8.

Nous remarquerons qu'ici aussi la solution de SERRE donne des résultats pratiquement confondus avec ceux de la solution cnoïdale de deuxième approximation aux faibles amplitudes relatives. Lorsque l'amplitude relative croît, à longueur d'onde relative constante, ces deux solutions présentent des écarts qui vont en augmentant. La solution cnoïdale de première approximation donne aussi des résultats assez voisins, surtout aux faibles amplitudes relatives.

Nous constatons sur ces deux séries de figures que, pour les faibles amplitudes relatives, la solution de STOKES donne des résultats très voisins de ceux de la houle cnoïdale ; pour les amplitudes relatives plus élevées, les écarts sont plus importants.

Mais, sur ces deux séries de figures, en comparant la solution de STOKES à la solution cnoïdale de deuxième approximation, on voit que les courbes correspondant à ces deux solutions se rapprochent, lorsque la longueur d'onde relative croît; l'écart entre ces deux solutions passe par un minimum et ensuite elles se mettent à diverger de nouveau. Aux faibles longueurs d'ondes relatives, et lorsque celles-ci décroissent, la vitesse horizontale maximale moyenne (en crête) dans la solution cnoïdale de deuxième approximation, se met à croître très vite et tend vers l'infini pour des longueurs d'ondes tendant vers 0 , alors que cette vitesse, dans la solution de STOKES et dans les mêmes conditions, se met à décroître, ce qui est un comportement plus normal (Cf. Fig III (c) et (d)).

Les figures IV (a) à (i) représentent les distributions des vitesses horizontales dans une section située au niveau de la crête d'une onde ayant une amplitude relative fixée à 0,2. Lorsque la longueur d'onde relative croît, la distribution des vitesses de la solution cnoïdale de deuxième approximation tend vers une distribution uniforme. Dans une section située au creux de l'onde pour la même amplitude relative, nous avons constaté que la distribution des vitesses était uniforme pour des longueurs d'ondes relatives $\lambda / d > 10$, en dessous, elles varient de moins de 2 % autour de la valeur moyenne. Les courbes nous montrent aussi que la distribution des vitesses de la solution de STOKES est comparable à celle de la houle cnoïdale de deuxième approximation ; les valeurs moyennes de ces vitesses dans la section étant d'ailleurs très voisines aussi dans ces deux solutions.

Nous avons tracé sur les figures IV B (a) à (c) les distributions des vitesses horizontales des solutions cnoïdales pour trois amplitudes relatives $\frac{a}{d}$ (0,2 ; 0,4 ; 0,6), la longueur d'onde relative étant maintenue constante à 20. Ces graphiques montrent que lorsque la cambrure croît, la distribution des vitesses horizontales de la solution cnoïdale de deuxième approximation s'écarte de plus en plus d'une distribution uniforme, et la vitesse horizontale atteint de grandes valeurs au voisinage de la surface libre. Un comportement semblable est constaté avec la solution de troisième approximation de la houle de STOKES aux faibles longueurs d'ondes relatives sur les figures IV C (a) et (b) qui donnent la distribution des vitesses horizontales pour une longueur d'onde relative fixée à 4.

Sur la figure IV B (c) la vitesse horizontale de la solution cnoïdale de deuxième approximation a atteint puis dépassé la célérité de l'onde. Les particules situées au voisinage de la surface libre iront plus vite que l'onde et se détacheront de la crête pour s'écrouler en avant d'elle : il y aura déferlement. On peut donc chercher une amplitude limite de la houle cnoïdale en prenant comme critère :

$$\left(\frac{U\,(x - Ct, \eta)}{\sqrt{gd}}\right) \leqslant \frac{C}{\sqrt{gd}} \quad (x - Ct = 0) \qquad \ldots\ldots (I)$$

C'est ce que nous avons fait ; la figure IX donne la courbe correspondant à cette limite (courbe notée 3) dans le plan (a/λ , d/λ) et on trouvera sur la figure XV (courbe notée 3) la courbe correspondant dans le

plan de LITTMAN. Cette limite est moins restrictive que celle obtenue par un autre critère et que nous verrons plus tard. Notons cependant qu'aux grandes longueurs d'ondes relatives (λ /d > 20) ces deux limites sont identiques.

Sur la figure IV C (b) la houle cnoïdale de deuxième approximation a atteint une amplitude limite définie par un critère que nous verrons par la suite et elle est très voisine de l'amplitude limite donnée par la condition I (a/d = 0,41). On remarquera aussi sur cette figure l'opposition de phase entre les vitesses horizontales au fond et ces vitesses au voisinage de la surface libre.

Nous aurions pu, en imposant que les vitesses horizontales sur une verticale reste en phase, définir une amplitude limite de la solution cnoïdale de deuxième approximation ; mais cela n'aurait pas tellement de sens car cette limite serait liée à la définition même de la célérité qui est arbitraire.

En applicant la condition I à la solution de troisième approximation de la houle de STOKES nous avons obtenu une cambrure limite de cette houle, représentée dans le plan (a/λ , d/λ) par la courbe notée (3) sur la figure XVI. Dans le plan de LITTMAN, cette condition nous donne la courbe (3) de la figure XII qui définit une amplitude limite de la houle de STOKES.

Il est intéressant de remarquer que cette condition découle de la condition de déferlement énoncée par STOKES pour la houle irrotationnelle en profondeur infinie et généralisée par MICHE aux houles rotationnelles ou non en profondeur finie, à savoir qu'une onde sur le point de déferler doit présenter en crête un point anguleux, c'est-à-dire que les deux branches du profil de la surface libre se coupent et forment un angle de 120° (Fig 9.3)

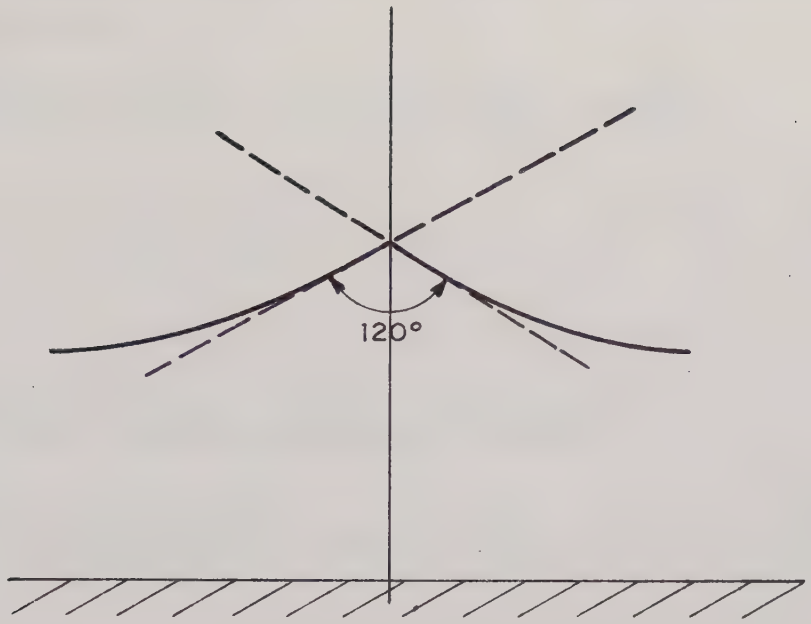


Fig 9.3 - Profil limite de la houle au déferlement d'après STOKES

Si, en ce point, la vitesse relative n'est pas nulle, la particule aura un changement brusque de direction qui implique une accélération et des forces infinies. La condition I de non déferlement que nous avons utilisée est contenue implicitement dans la condition de déferlement de STOKES et MICHE.

En partant de ce critère, MICHE a défini une cambrure donnant la forme limite d'une houle du 2ème ordre par :

$$\left(\frac{a}{\lambda}\right)_{max} = 0{,}14 \text{ th } \left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) \qquad \text{(cambrure limite de MICHE)}$$

Nous avons tracé sur la figure XVII la courbe de cambrure limite donnée par cette condition dans le plan (a/λ , d/λ). Nous voyons que cette limite est très voisine de celle de la condition I appliquée à la houle de STOKES de troisième approximation l'écart entre ces deux cambrures limites étant de 6 % aux valeurs de d/λ pour lesquelles l'approximation de la cambrure limite de MICHE est valable ($0{,}4 \leqslant d/\lambda \leqslant 1$).

2.2.2 - Les vitesses verticales

La composante verticale de la vitesse a pour expression dans les différentes solutions :

- houle cnoïdale de première approximation (KDV - KELLER)

$$\frac{v\,(x,z,t)}{\sqrt{gh_o}} = \left\{ \sqrt{\frac{3}{m}\left(\frac{a}{h_o}\right)^3} \cdot (1 + z/h_o) + 0\left(\frac{a}{h_o}\right)^{5/2} \right\} cn\left(\alpha\left[x - Ct\right], m\right).$$
$$\cdot\ sn\left(\alpha\left[x - Ct\right], m\right) \cdot dn\left(\alpha\left[x - Ct\right], m\right)$$

- houle cnoïdale de deuxième approximation (LAITONE)

$$\frac{v\,(x,z,t)}{\sqrt{gh_o}} = \left\{ \sqrt{\frac{3}{m}\left(\frac{a}{h_o}\right)^3} \cdot (1+z/h_o)\, cn\left(\beta\left[x - Ct\right], m\right) sn\left(\beta\left[x - Ct\right], m\right).\right.$$
$$\cdot\ dn\left(\beta\left[x-Ct\right], m\right) \cdot \left[1 + \frac{a}{h_o}\left(\frac{5m+2}{8m}\right) - \frac{a}{h_o}\left(1 - \frac{1}{2m}\right)\left(2\frac{z}{h_o} + \frac{z^2}{h_o^2}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{a}{h_o}\left(1-6z/h_o - 3z^2/h_o^2\right) cn^2\left(\beta\left[x-Ct\right], m\right)\right] + 0\left(\frac{a}{h_o}\right)^{7/2}$$

- solution de SERRE

$$\frac{v\,(x,z,t)}{\sqrt{gh_o}} = z\left[\frac{\sqrt{a^2(1 - 1/m) + ah_o\,(2 - 1/m) + h_o^2}}{(h + y)^2}\right] 2\,a\,\gamma\ cn\left(\gamma\left[x-Ct\right], m\right).$$
$$\cdot\ sn\left(\gamma\left[x - Ct\right], m\right) \cdot\ dn\left(\gamma\left[x - Ct\right], m\right)$$

- houle de STOKES de 3ème approximation

$$\frac{v\,(x,z,t)}{\sqrt{gh_o}} = \frac{b\,Q\,C_r}{h_o\,sh\,Q} \cdot sh\left(Q\left[1+z/h_o\right]\right) \sin\theta + \frac{3\,C_r\,b^2\,Q^2}{4\,sh^4\,Q\,h_o^2}\, sh\left(2\left[Q\ 1+z/h_o\right]\right).$$
$$\cdot \sin 2\theta + \frac{3\,C_r\,b^3\,Q^3}{64\,h_o^3\,sh^7\,Q}\left(13 - 4\,sh^2\,Q\right) sh\left(3\,Q\left[1+z/h_o\right]\right)\sin 3\theta.$$

avec

$$C_r = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi d}\ th\ Q}$$

Nous avons représenté sur les figures IV D (a) à (i) les distributions des vitesses verticales dans une section située au point $\eta = d$ pour une amplitude relative égale à 0,2 et des longueurs d'onde relatives variant de 4 à 50 (avec la houle de STOKES, dans le cas où il y a des crêtes secondaires, c'est la section la plus voisine de la crête).

Nous voyons sur ces figures que la solution de SERRE est toujours très voisine de la solution cnoïdale de deuxième approximation, mais plus éloignée de la solution de première approximation. Dans cette dernière solution et dans celle de SERRE la distribution des vitesses verticales est linéaire avec la profondeur.

Lorsque la cambrure diminue la distribution des vitesses verticales de la solution cnoïdale de deuxième approximation tend vers une distribution régulière (les courbes deviennent des droites). Ces vitesses diminuent avec la cambrure et s'annulent dans toutes les solutions cnoïdales lorsque la longueur d'onde est infinie (onde solitaire) car alors $h = d$. Dans ce cas, l'onde est toute entière au-dessus du niveau moyen ; la cote $z = d$ correspond à la partie de l'écoulement que l'onde n'a pas encore atteint et où la vitesse verticale est nulle. La distribution des vitesses verticales donnée par la solution de troisième approximation de la houle de STOKES est très voisine de celle de la deuxième approximation de la houle cnoïdale.

Sur les figures IV E (a) à (c), nous avons représenté ces mêmes vitesses verticales mais pour des amplitudes variant de 0,2 à 0,6 et pour une longueur d'onde relative maintenue constante à 20. Les mêmes remarques que précédemment s'appliquent en ce qui concerne l'influence de la cambrure sur cette distribution des vitesses verticales dans une section. Cependant le cas de la figure IV E (c) est celui d'une onde ayant atteint la limite du déferlement suivant la condition V du paragraphe précédent.

Nous avons présenté sur les figures IV F (a) et (b) les mêmes courbes pour des amplitudes relatives de 0,2 et 0,4 et une longueur d'onde relative de 4. Remarquons l'inversion du signe du gradient des vitesses

verticales de la solution cnoïdale de deuxième approximation.

C'est en prenant comme condition que le gradient des vitesses verticales dans une section doit rester positif

$$\frac{d\, v\,(o,z)/\sqrt{g h_o})}{d\,(y/h_o)} \geqslant \quad o$$

et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 en (a/h_o) que LAITONE a défini une amplitude limite de la houle cnoïdale comme étant celle vérifiant la condition

$$\frac{a}{h_o} \leqslant \frac{8\,m}{9\,m + 2}$$

Cette limite a été représentée sur les figures XI et XV et elle est moins restrictive que la limite obtenue en considérant l'expression du gradient de pression et que nous étudierons plus loin. Il faut remarquer cependant que l'expression de la vitesse verticale dans la solution de deuxième approximation utilisée ici contient des termes d'ordre plus élevé que $\frac{a}{h_o}$, et c'est ce qui explique que la courbe (2) de la figure XV ne laisse pas prévoir le comportement observé plus haut.

Sur les figures IV E nous voyons que l'écart entre la solution cnoïdale de deuxième approximation et la solution de SERRE d'une part, et la houle de STOKES de troisième approximation d'autre part, est plus important et va en augmentant lorsque la cambrure croît. La solution de STOKES est plus voisine de la solution cnoïdale de première approximation.

2.3 - La célérité

Dans toutes les solutions que nous avons étudiées, la célérité de l'onde est définie comme étant la vitesse qui, appliquée au système, annulerait le débit de quantité de mouvement en moyenne sur une longueur d'onde, c'est-à-dire une vitesse C telle que :

$$\int_o^{\lambda} \int_o^{\eta} (U\,(X,\, z) - C)\, dX\, dz \;=\; 0$$

U (X, z) étant la vitesse horizontale dans un repère galiléen et $X = x - Ct$.

La célérité a pour expression dans les différentes solutions :

- solution cnoïdale de première approximation (KDV - KELLER)

$$\frac{C}{\sqrt{gh_o}} = 1 + \frac{a}{m\,h_o}\left[\frac{E(m)}{K(m)} - \frac{1}{2}\right] + 0\left(\frac{a}{h_o}\right)^2$$

- solution cnoïdale de deuxième approximation (LAITONE)

$$\frac{C}{\sqrt{gh_o}} = 1 + \left(\frac{a}{h_o}\right)\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2} - \frac{E(m)}{K(m)}\right) + \left(\frac{a}{h_o}\right)^2 \frac{1}{m^2}\left[\frac{E(m)}{K(m)}\left(\frac{E(m)}{K(m)} + \frac{3m}{4} - 1\right) - \frac{(m^2 + 14m - 9)}{40}\right] + 0\left(\frac{a}{h}\right)^3$$

- solution de SERRE

$$\frac{C}{\sqrt{gh_o}} = \frac{\sqrt{a^2(1 - 1/m) + ah_o(2 - 1/m) + h_o^2}}{\left(h + \frac{a}{m}\left[\frac{E(m)}{K(m)} + m - 1\right]\right.}$$

- solution de 3ème approximation de la houle de STOKES

$$\frac{C}{\sqrt{gd}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi d}}\,\text{th}\,Q\left[1 + \frac{b^2 Q^2}{16\,h_o^2\,\text{sh}^4 Q}\left(9 + 8\,\text{ch}^4 Q - 8\,\text{ch}^2 Q - 2\,\text{th}^2 Q\right)\right]$$

Nous remarquerons que l'expression de la célérité de la solution de première approximation nous donne, lorsque

(i) $m \to 0$ $\quad \frac{C}{\sqrt{gh_o}} \to -\infty$ $\quad (E(m)/k(m) \to 1)$

(ii) $m = 0{,}8261$ $\quad \frac{C}{\sqrt{gh_o}} = 1$ $\quad (E(0{,}8261)/K(0{,}8261) = 0{,}5)$

(iii) $m \to 1$ $\quad \frac{C}{\sqrt{gh_o}} \to 1 + \frac{a}{2h_o}$ $\quad (E(m)/K(m) \to 0)$

nous trouverons donc des vitesses sub-critiques pour des valeurs du paramètre des fonctions elliptiques inférieures à 0,8261 et des vitesses super-critique pour des valeurs de m plus grandes que 0,8261. Lorsque m est égal à 0,8261 la célérité est indépendante du rapport a/h_o.

Par contre, l'expression de la célérité de la solution de deuxième approximation nous donne :

(i) pour $m \to 0$ $\qquad \dfrac{C}{\sqrt{gh_o}} \to \infty$

(ii) pour $m \to 1$ $\qquad \dfrac{C}{\sqrt{gh_o}} \to 1 + \dfrac{a}{2\,h_o} - 0{,}15\,\left(\dfrac{a}{h}\right)^2$

Comme m est le paramètre qui détermine la période des fonctions elliptiques de JACOBI, c'est lui qui déterminera la longueur d'onde ; il faut donc s'attendre, pour les faibles valeurs de m (donc de la longueur d'onde) à voir la célérité de la solution de première approximation tendre vers $-\infty$ tandis que la célérité de la solution de deuxième approximation tendra vers l'infini ; ces comportements étant, bien entendu, à rejeter. Ces solutions cnoïdales ne conviennent donc pas pour l'étude des houles dont la longueur d'onde est faible devant le tirant d'eau.

Nous avons tracé sur la figure V les courbes de variation de $C/\sqrt{gh_o}$ de la solution cnoïdale de deuxième approximation en fonction de λ/h_o pour 7 valeurs de a/h_o comprises entre 0,1 et 0,7 et nous voyons que cette célérité se met à croître très rapidement pour des valeurs de $\lambda/h_o < 5$. Remarquons aussi qu'une forte variation de l'amplitude influence très peu la vitesse de propagation et qu'aux grandes longueurs d'ondes relatives, une variation importante de cette longueur d'onde affecte très peu la valeur de la célérité.

L'étude de la célérité obtenue avec la solution cnoïdale de deuxième approximation est très intéressante. WEHAUSEN et LAITONE (1963) ont donné un graphique représentant les courbes à m constant dans le plan $(C/\sqrt{gh_o},\ a/h_o)$. Dans ce graphique ces courbes ont été approchées par des droites, ce qui est acceptable pour les grandes valeurs de m (voisines de 1 mais qui ne l'est plus lorsque m est petit. Ce graphique laisse supposer

qu'il existerait des célérités inférieures à 0,7 pour de faibles valeurs de m dans la gamme des amplitudes constatées expérimentalement. Ce graphique de WEHAUSEN et LAITONE est erroné en ce qui concerne le comportement de la solution aux faibles valeurs de m.

Nous avons représenté dans le plan de LITTMAN ($C/\sqrt{gd}$, a/d) les courbes à m constant (Fig VII). Nous constatons que pour de faibles valeurs de m, la célérité commence à décroître avec une variation de l'amplitude; passe par un minimum, puis recommence à croître très rapidement. Pour chaque valeur de m, la valeur de $\frac{a}{h_o}$ pour laquelle ce minimum est atteint nous est donnée par :

$$\frac{d\,(C/\sqrt{gh_o})}{d\,(a/h_o)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2} - \frac{E(m)}{K(m)}\right) + 2\left(\frac{a}{h_o}\right)\frac{1}{m^2}\left[\frac{E(m)}{K(m)}\left(\frac{E(m)}{K(m)} + \frac{3m}{4} - 1\right) - \frac{(m^2+14m-9)}{40}\right] = 0$$

Le lieu de ces minima donne une courbe qui limite donc le domaine d'utilisation de la solution cnoïdale de deuxième approximation dans le plan de LITTMAN. Ce domaine est compris entre l'enveloppe des minima de $C/\sqrt{gh_o}$ à m constant et la courbe de célérité de l'onde solitaire ($m = 1$) et il est centré approximativement sur un axe qui correspond à la vitesse critique.

Nous avons tracé dans le plan (d/λ , a/d) les courbes à célérité constante et les courbes à m constant (Fig VIII). Pour des célérités inférieures à 0,8 et aux faibles amplitudes, nous constatons que lorsque la longueur d'onde croît, l'amplitude croît, passe par un minimum et puis décroît La courbe (1) de la figure VIII correspond à la courbe du lieu des minima de $C/\sqrt{gd}$ dans le plan de LITTMAN, et se présente comme le lieu des points où une courbe à m constant est tangente à une courbe $C/\sqrt{gd}$ constant. Cette courbe (1) limite sur la droite le domaine d'utilisation de la solution cnoïdale de deuxième approximation.

Sur la figure IX nous avons tracé dans le plan (d/λ , a/λ) les courbes à m constant et les courbes à $C/\sqrt{gd}$ constant. La courbe (1) de cette figure correspond à la courbe (1) de la figure VIII. Nous avons utilisé le plan (d/λ , a/λ) parce qu'il convient très bien à une étude comparative des solutions de la houle cnoïdale et de la houle de STOKES.

Sur les figures VI (a) à (d) nous avons représenté les courbes de $C/\sqrt{gd}$ en fonction de λ/d pour les amplitudes relatives suivantes : 0,2 ; 0,4 ; 0,6 et 0,8. Nous constatons, pour des longueurs d'onde ralatives supérieures à 5 et aux faibles amplitudes relatives, que ces courbes sont très voisines et que les écarts entre les différentes solutions cnoïdales est de moins 5 %. Nous voyons aussi que la solution de SERRE donne des résultats plus voisins de la solution de première approximation de la houle cnoïdale que de la solution de deuxième approximation.

Nous avons aussi tracé sur les figures VI (a) à (d) les courbes $C/\sqrt{gd}$ données par la solution de troisième approximation de la houle de STOKES ainsi que la courbe de célérité C_o donnée par la formule d'AIRY.

$$\frac{C_o}{\sqrt{gd}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi d}\ th\ Q}$$

et dont on sait qu'elle donne la vitesse de propagation d'une houle de laboratoire à moins de 10 % et qu'on peut utiliser ici comme courbe de référence.

Nous constatons sur ces figures qu'aux faibles cambrures, la solution de STOKES est très voisine des solutions cnoïdales et que les résultats ont des écarts de moins de 10 % avec la formule d'AIRY. Par contre, pour des cambrures plus élevées, ces écarts deviennent plus importants ainsi que les écarts entre la solution de STOKES de troisième approximation et les théories cnoïdales.

Nous remarquerons aussi sur ces figures que la célérité de la houle de STOKES de troisième approximation est très voisine de celle de la solution cnoïdale de deuxième approximation. Mais, à amplitude relative donnée - en dehors de la zone de très faibles longueurs d'onde relatives où nous avons vu que la célérité donnée pour la solution cnoïdale de deuxième approximation tendait vers l'infini - nous constatons que ces célérités restent très voisines et, pour une certaine valeur de la longueur d'onde relative dépendant de l'amplitude relative fixée, ces courbes de célérité s'intersectent et divergent pour les grandes longueurs d'onde relatives λ/d.

Avec une certaine part d'arbitraire, nous pourrons prendre ces points d'intersection comme étant la limite séparant le domaine de ces deux théories (aux ordres d'approximation utilisés). Nous avons tracé dans le plan (d/λ , a/λ) les courbes à célérité constante obtenues avec ces deux théories (Fig XVI). La courbe notée (4) est le lieu des points où les courbes à célérité constante s'intersectent, on voit qu'aux plus fortes cambrures ces solutions divergent très rapidement. Cette courbe (4) de la figure XVI limite donc à gauche dans le plan (d/λ , a/λ) - avec un peu d'arbitraire - le domaine d'utilisation de la solution de troisième approximation de la houle de STOKES.

Cette courbe correspond à la courbe notée (5) dans le plan de LITTMAN (Fig XIII) et qui est le lieu des points d'intersection des courbes à longueurs d'onde constantes de la solution de STOKES et de la solution cnoïdale de deuxième approximation. Ici, comme les courbes à longueurs d'onde relatives constantes ne se coupent plus pour une longueur d'onde relative λ/d inférieure à 4 (et vont même en s'écartant lorsque cette longueur d'onde diminue) ; nous avons raccordé la courbe 3 - obtenue en égalant la vitesse horizontale en crête à la célérité - à la courbe (5) par la courbe (4) (en pointillé) et dans l'existence de laquelle il ne faut pas chercher d'autres explications.

Les courbes notées (3), (4) et (5) sur les figures XII et XIII déterminent dans le plan de LITTMAN le domaine d'utilisation de la houle de STOKES de troisième approximation. Dans le plan (d/λ , a/λ) les courbes (3) et (5) de la figure XIV délimitent le domaine d'utilisation de cette théorie.

Dans ces deux plans, nous remarquerons que ces deux domaines (celui de la houle cnoïdale de deuxième approxiamtion et celui de la houle de STOKES de troisième approximation) se recouvrent partiellement et, à l'intérieur du domaine commun à ces deux solutions - sauf à proximité des frontières de chaque domaine - il faudrait avoir recours à l'expérimentation pour déterminer la meilleure théorie à utiliser.

2.4 - La pression

La pression a pour expression dans les différentes solutions :

- houle cnoïdale de première approximation (KDV - KELLER)

$$\frac{p\,(x,z,t)}{\rho\, g h_o} = (\eta - z) / h_o + 0\left(\frac{a}{h_o}\right)$$

- houle cnoïdale de deuxième approximation (LAITONE)

$$\frac{p\,(x,z,t)}{\rho\, g\, h_o} = (\eta - z)/h_o - \left(\frac{a}{h_o}\right)^2 \frac{3}{4m}\,(2\,z/h_o + z^2/h_o^{\,2})\left[1 - m + 2\,(2\,m - 1)\right.$$

$$\left. \cdot\, cn^2\,(\beta\left[x - Ct\right], m) - 3\,m\;\; cn^4(\beta\left[x - Ct\right], m)\right] + 0\left(\frac{a}{h}\right)^3$$

- solution de SERRE

$$\frac{p\,(x,z,t)}{g\, h_o} = \frac{(\eta - z)}{h_o}\left\{1 + \frac{2\,h_o}{3}\,\frac{\left[a^2\,(1-1/m) + a\,h_o\,(2-1/m) + h_o^{\,2}\right]}{\left[h_o + a\,cn^2\,(\gamma\,x - Ct\;\;, m)\right]^2}\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\left[2\,a\,\gamma^2\,(m - 1 + 2\,(1-2m)\,cn^2\,(\gamma\left[x-Ct\right], m) + 3m\,cn^4(\gamma\left[x-Ct\right], m)\right)\right]\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2\,a\,\gamma\,cn(\gamma\left[x-Ct\right],m)\;\, sn(\gamma\left[x-Ct\right], m)\;\, dn(\gamma\left[x-Ct\right], m)}{h + a\,cn^2\,(\gamma\left[x - Ct\right], m)}\right]\right\}$$

- houle de STOKES de troisème approximation

$$\frac{p\,(x,z,t)}{\sqrt{g\,d}} = \left(\frac{C}{\sqrt{g\,d}}\cdot\frac{u}{\sqrt{g\,d}} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{g\,d}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sqrt{g\,d}}\right)^2 - \frac{\eta}{d}\right)$$

où $\frac{C}{\sqrt{g\,d}}$, $\frac{u}{\sqrt{g\,d}}$, $\frac{v}{\sqrt{g\,d}}$ et $\frac{\eta}{d}$ ont les expressions données plus haut.

Nous remarquerons que seule la solution cnoïdale de première approximation donne une distribution hydrostatique des pressions.

Nous avons tracé sur les figures X A (a) à (d) l'évolution de la pression $(p/\rho\, g\, d)$ calculée au fond sous la crête (point A de la figure 9.4 ci)dessous) en fonction de $\lambda\,/d$ pour quatre valeurs de a/d.

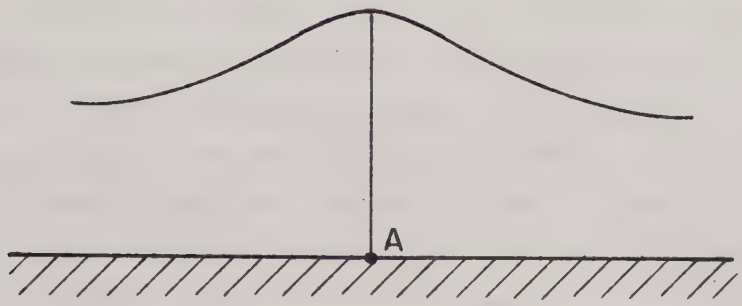


Fig 9.4

Nous constatons sur ces figures que la pression obtenue par la méthode de SERRE est plus voisine de celle obtenue avec la solution de première approximation que celle obtenue avec la solution de deuxième approximation ; l'écart entre ces deux solutions ne dépasse pas 0,5 % aux faibles amplitudes. La longueur d'onde n'influence pas beaucoup cet écart alors que l'amplitude l'influence beaucoup, ce qui est normal. La solution de troisième approximation de la houle de STOKES est voisine de la solution cnoïdale de première approximation et de la solution de SERRE.

Sur les figures X B (a) à (i) nous avons tracé les courbes de distribution des pressions dans une section verticale située en crête pour des houles de différentes longueurs d'onde et une amplitude relative fixée à 0,2. Nous remarquerons que les écarts entre les différentes solutions cnoïdales sont toujours faibles et que lorsque la cambrure diminue, ces distributions tendent toutes vers une distribution hydrostatique. Ici la solution de SERRE est toujours plus voisine de la solution cnoïdale de première approximation. La houle de STOKES de troisième approximation donne une distribution très voisine de celle de la houle cnoïdale de deuxième approximation.

Sur les figures X C (a) à (c) et X D (a) et (b) nous avons étudié l'évolution de ces distributions lorsque l'amplitude relative croît, pour

deux longueurs d'onde relatives ($\frac{\lambda}{d}$ = 20 et 4 respectivement). Nous remarquerons l'inversion des signes du gradient de pression dans la solution cnoïdale de deuxième approximation sur ces figures. Pour des amplitudes relatives moyennes, nous n'obtenons pas de pression nulle à la surface libre avec cette solution. Cela vient du fait que cette solution n'est qu'une approximation et que le processus d'approximation utilisé fait que la condition de pression nulle à la surface libre n'est vérifiée, pour les termes du deuxième ordre, que pour une surface libre correspondant à la solution d'ordre zéro. Dans une étude antérieure (*) nous avions fait une analyse de ce processus. En pratique, on ne doit utiliser le terme de deuxième ordre pour le calcul de la pression que pour des valeurs de z comprises entre $-h_o$ et 0 ; pour des cotes comprises entre 0 et a on n'utilisera que le terme du premier ordre pour le calcul de la pression, ce qui donnera une pression hydrostatique.

L'étude de la pression dans la solution cnoïdale de deuxième approximation nous a permis de définir une amplitude limite de la houle cnoïdale. Considérons l'expression de la pression de cette solution.

$$\frac{p}{\rho g h_o} = \frac{\eta - z}{h_o} - \left(\frac{a}{h_o}\right)^2 \frac{3}{4m} \left(2\, z/h_o + z^2/h_o^2 \left[1-m + 2(2m-1)\, cn^2\left(\beta\left[x-Ct\right],m\right) - 3\, m\, cn^4\left(\beta\left[x-Ct\right], m\right)\right.\right.$$

ce qui donne pour le gradient de pression :

$$\frac{\partial(p/\rho g h_o)}{\partial(z/h_o)} = -1 + \left(\frac{a}{h_o}\right)^2 \frac{3}{2m} (1 + z/h_o)\left[m-1 - 2(2m-1)\, cn^2\left(\beta\left[x-Ct\right],m\right) + 3\, m\, cn^4\left(\beta\left[x-Ct\right],m\right)\right]$$

Plaçons-nous dans une section verticale se trouvant à une crête de l'onde

alors $\beta\left[x - Ct\right] = n\, K(m)$ $\qquad n = 0, 2, 4, 6, \ldots$

(*) R. STAUB, Comparaison numérique des diverses théories de la houle en eau peu profonde. Rapport E.D.F. N° D.R 220 (1970). Non publié.

et $$cn^2\left[n\,K(m), m \right] = 1$$

d'où $$\frac{\partial (p/\rho\, gh_o)}{\partial (z/h_o)} = -1 + \left(\frac{a}{h_o}\right)^2 \frac{3}{2m} (1 + z/h_o)$$

En écrivant que le gradient vertical de pression reste négatif nous avons l'inégalité suivante :

$$\left(\frac{a}{h_o}\right)^2 \frac{3}{2m} (1 + z/h_o) < 1$$

Au voisinage de la surface libre $(z = a)$ nous devrons avoir

$$\left(\frac{a}{h_o}\right)^2 (1 + \frac{a}{h_o}) < \frac{2m}{3} \qquad \text{II}$$

au-delà de cette limite il y aura inversion du signe du gradient de pression dans la section. Cette condition est liée au déferlement. En effet, nous avons une pression nulle à la surface libre ; si le gradient de pression s'inverse en dessous de cette surface libre nous obtiendrons une pression négative juste en dessous de la crête, ce qui causera une entrée d'air sous la surface libre avec apparition d'un moutonnement.

Nous avons tracé sur la figure XI la courbe correspondant à la condition II de non déferlement, en portant a/h_o en ordonnée et en portant en abscisse le paramètre des fonctions elliptiques de JACOBI m. Nous voyons sur cette figure que cette condition est la plus restrictive sauf aux faibles longueurs d'onde (pour $m < 0{,}2$).

Dans le plan de LITTMAN cette condition donne la courbe notée (2) sur les figures VII, XII, et XIII. Cette courbe rejoint celle de l'enveloppe des minima de $C/\sqrt{gd}$ à m constant pour une valeur de m voisine de 0,3 (Fig VII). En même temps elle ferme le domaine d'utilisation de la solution cnoïdale de deuxième approximation. Dans le plan de LITTMAN ce domaine sera limité à droite par la courbe des célérités à $m = 1$ qui est le domaine de l'onde solitaire ; à gauche par une courbe qui est l'enveloppe des minima des courbes de célérité à m constant, pour de faibles valeurs de m, et ce domaine sera limité supérieurement par la courbe correspondant à la condition II qui est la condition de non inversion du signe du gradient de pression

dans une section verticale. Inférieurement, ce domaine sera limité par une courbe infiniment voisine de l'axe $C/\sqrt{gd}$ et tangente au point (1,0). Ce domaine est celui noté II sur la figure XII.

Dans le plan $(d/\lambda\ ,\ a/\lambda\ )$ sur les figures IX et XIV, cette condition donne les courbes notées (2). Elles délimitent dans ce plan le domaine d'utilisation de la solution cnoïdale de deuxième approximation qui est le domaine noté II sur la figure XIV.

3 - LES DOMAINES D'UTILISATION DES THEORIES DE LA HOULE ETUDIEES.

Dans ce paragraphe nous allons rassembler les limites de la solution cnoïdale de deuxième approximation et de la solution de troisième approximation de la houle de STOKES que nous avons mis en évidence plus haut et nous décrirons ces domaines dans les deux plans que nous avons utilisé : le plan de LITTMAN $(C/\sqrt{gd}\ ,\ a/d)$ et le plan $(d/\lambda\ ,\ a/\lambda\ )$.

Le premier critère que nous avons pris en compte pour déterminer les limites de cette solution est un critère physique : la condition de non déferlement. Il y a plusieurs façons de décrire le déferlement et selon la façon dont on le fait on obtient une condition différente.

Dans la solution cnoïdale de deuxième approximation la condition de non déferlement que nous avons utilisé est que le gradient de pression doit avoir le même signe en tout point d'une section verticale située en crête. Cette condition se traduit par la condition II obtenue plus haut et nous donne les courbes notées (2) sur les figures XII (plan de LITTMAN) et XIV (plan $(d/\lambda\ ,\ a/\lambda\ )$).

Le domaine d'utilisation de la solution de deuxième approximation de la houle cnoïdale est formé par les courbes notées (1) sur les figures XII et XIV et qui sont les lieux des minima des courbes de célérité à m constant, pour différentes valeurs de m. Cette limite est mathématique car il n'existe pas de solutions cnoïdales à gauche de la courbe (1) dans le plan de LITTMAN (Fig VII et XII). Il convient de remarquer que cette limite

est liée à la définition de la célérité que nous avons utilisé.

Les courbes (1) et (2) des figures XII et XIV délimitent un domaine noté II sur ces figures et qui représente le domaine d'utilisation de la solution cnoïdale de deuxième approximation.

Dans la solution de troisième approximation de la houle de STOKES nous avons défini la cambrure limite au déferlement comme étant celle pour laquelle la vitesse des particules de la surface libre en crête est égale à la célérité. Cette cambrure limite nous donne les courbes notées (3) des figures XII et XIV.

En comparant la célérité de la houle de STOKES et de la houle cnoïdale - aux ordres d'approximation utilisés - dans le plan $(d/\lambda , a/\lambda)$ nous avons montré que pour des longueurs d'onde relatives assez fortes, ces célérités n'étaient plus comparables ; ce qui nous a permis de définir une courbe des cambrures limites de la houle de STOKES aux grandes longueurs d'onde relatives. Cette courbe a été obtenue avec un peu d'arbitraire : sachant que la solution de troisième approximation de la houle de STOKES ne convient pas pour l'étude des houles de très grandes longueurs d'onde - formation de crêtes secondaires - nous avons cherché les cambrures pour lesquelles la solution de STOKES et la solution cnoïdale de deuxième approximation avaient la même célérité pour différents tirants d'eau, nous avons ainsi obtenu les courbes notées (4) sur les figures XII et XIV qui prolongées arbitrairement ferment le domaine d'utilisation de la solution de troisième approximation de la houle de STOKES (domaine I sur ces figures). Ce domaine recouvre partiellement celui de la solution cnoïdale de deuxième approximation et dans la partie commune à chacun des domaines il faudrait avoir recours à l'expérimentation pour pouvoir déterminer la meilleure solution à utiliser.

4 - CONCLUSION.

En comparant numériquement la solution de SERRE aux autres solutions de la houle en profondeur faible nous avons montré que cette solution se comparait mieux à la solution cnoïdale de deuxième approximation et que l'hypothèse de répartition des vitesses horizontales dans une section faite par SERRE était tout à fait acceptable.

Cette étude nous a permis de montrer que la solution de troisième approximation de la houle de STOKES donne des résultats très voisins de ceux des diverses théories de la houle cnoïdale aux faibles cambrures, pour la majorité des paramètres de la houle. Toutefois, en étudiant la surface libre aux grandes longueurs d'onde relatives nous avons vu que les deuxième et troisième harmoniques de la houle de STOKES influençaient beaucoup cette surface libre et étaient responsables de la formation de crêtes secondaires sur cette surface libre ; ce qui a pour conséquence de rendre cette théorie inutilisable pour l'étude des houles de grandes longueurs d'onde en profondeur faible.

En utilisant des critères physiques nous avons pu définir le domaine d'utilisation de la solution de deuxième approximation de la houle cnoïdale et celui de la solution de troisième approximation de la houle de STOKES.

Les plans utilisés pour caractériser ces domaines sont :

1°) - Le plan $(C/\sqrt{gd},\ a/d)$ de LITTMAN

2°) - Le plan $(d/\lambda\ ,\ a/\lambda\ )$

Le plan de LITTMAN a l'inconvénient de n'utiliser aucun des paramètres qui caractérisent chacune des théories de la houle, et ne permet donc pas de montrer les caractères propres à chaque théorie. Or, une houle est avant tout caractérisée par sa cambrure et la profondeur relative à la longueur d'onde dans laquelle elle se propage. Il nous semble que l'on devrait donc préférer le plan $(d/\lambda\ ,\ a/\lambda\ )$ où l'on utilise justement ces paramètres. Ce plan a un intérêt plus pratique que celui de LITTMAN.

Les domaines de chacune de ces théories, représentées dans le plan $(a/\lambda\ ,\ d/\lambda\ )$ montrent tout de suite les limites de ces théories par rapport aux paramètres qui les caractérisent : la cambrure pour la houle de STOKES et la profondeur relative à la longueur d'onde pour la houle cnoïdale. Toutefois, un inconvénient de ce plan c'est que le domaine de l'onde solitaire se réduit au point (0,0) ; ce qui ne met pas en évidence l'existence d'une amplitude maximale pour cette onde, alors que cette limite se représente très bien dans le plan de LITTMAN.

Les domaines d'utilisation de la solution cnoïdale de deuxième approximation et de la houle de STOKES de troisième approximation ont été précisés afin de savoir où ces solutions sont utilisables. Seule une connaissance des rayons de convergence des séries résolutives de chaque théorie de la houle permettrait de définir d'une façon rigoureuse les domaines d'existence de ces théories. Mais l'on sait - surtout pour la houle de STOKES qui est étudiée depuis plus d'un siècle - d'après les études expérimentales, que ces théories, aux ordres d'approximation étudiés ici, permettent de représenter avec une assez bonne précision les houles observées ; d'où l'intérêt pratique des domaines d'utilisation de ces solutions.

Cette étude avait uniquement pour but de comparer un certain nombre de solutions de la houle entre elles et de préciser les domaines où ces théories, aux ordres d'approximation étudiés ici, peuvent être utilisées. Cette étude ne permet pas de conclure - surtout pour les houles appartenant au domaine commun à la solution cnoïdale de deuxième approximation et à la houle de STOKES de troisième approximation - sur la théorie qui représente le mieux la mécanique d'une houle donnée. Il serait donc intéressant qu'une étude expérimentale la plus complète possible vienne répondre à cette question et vérifier la courbe d'amplitude limite de la houle au déferlement en fonction de la longueur d'onde relative tel qu'il est possible de l'obtenir à partir de considérations théoriques.

Il serait, en particulier, important de pouvoir vérifier expérimentalement le champ des vitesses que donnent ces théories. Le problème de la mesure des vitesses dans la houle s'est longtemps posé, mais il existe maintenant des techniques (technique des fils et des films chauds, procédé optique utilisant le laser) dont la mise au point et l'utilisation peuvent être envisagées pour la réalisation de ces mesures.

QUATRIEME PARTIE

INTEGRATION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE PREMIERE APPROXIMATION DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE

CHAPITRE X

METHODE D'INTEGRATION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE PREMIERE APPROXIMATION DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE ET ETUDE DE LA STABILITE D'UN SCHEMA NUMERIQUE

Il arrive fréquemment en génie hydraulique que l'on ait à étudier les ondes de gravité en eau peu profonde et qu'on ne puisse pas trouver un repère de translation par rapport auquel l'écoulement soit permanent. Pour tous les problèmes où l'on ne pourra pas se libérer de la variable t on devra avoir recours au calcul numérique pour intégrer les équations des ondes longues avec courbure.

Dans ce chapitre nous présenterons une méthode numérique qui permet d'intégrer ces équations en variables de LAGRANGE avec des conditions initiales et des conditions aux limites. Nous proposerons un schéma numérique d'intégration qui est consistant au premier ordre et dont nous analyserons la stabilité pour montrer qu'il est stable et - en conséquence du théorème d'équivalence de LAX - qu'il est convergent.

1 - ADIMENTIONALISATION DES EQUATIONS ET POSITION DU PROBLEME.

Pour un écoulement plan en présence d'un fond variable et du frottement les équations de première approximation des ondes longues avec courbure sont obtenues à partir des équations (4.14) et s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} h\, x_{tt} + \left[\eta^2 \left(\frac{1}{3}\,\eta_{tt} + \frac{1}{2}\,g\right]_a - g\,h\,(I + J) = o \right. \\ \left. \eta_{x_a} = h \end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

avec $I(x) = -H_x$

et $J = \dfrac{x_t \left|x_t\right|}{k^2 \eta^{4/3}}$ (k = coefficient de STRICKLER)

Nous normerons les variables en posant :

$$\left.\begin{aligned} x &= L_o\, X \\ a &= L_o\, A \\ t &= T_o\, T \\ \eta &= L_o\, N \\ \text{et} \qquad h &= L_o\, M \end{aligned}\right\} \qquad (10.2)$$

où L_o et T_o sont respectivement une longueur et un temps de référence. Nous rappelons que h est le tirant d'eau à l'instant initial.

Cette opération n'est pas absolument nécessaire mais elle facilite la généralisation des résultats et permet d'adapter très facilement le code de calcul à l'étude de phénomènes d'échelles très différentes.

Substituons (10.2) dans les équations du système (10.1) après avoir divisé la première équation de ce système par g ; il vient

$$\frac{L_o^2}{g\,T_o^2} M \frac{\partial^2 X}{\partial T^2} + \frac{1}{L_o} \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{L_o^3}{3\,g\,T_o^2} N^2 \frac{\partial^2 N}{\partial T^2} + \frac{L_o^2\,N^2}{2}\right) - L_o\, M \left(I - \frac{L_o^2}{k^2\,T_o^2\,L_o^{4/3}} \frac{\frac{\partial X}{\partial T}\left|\frac{\partial X}{\partial T}\right|}{N^{4/3}}\right) = o$$

$$N \frac{\partial X}{\partial A} = M$$

Divisons la première équation par L_o et posons

$$U_o = \frac{L_o}{T_o}$$

$$F_o = \frac{U_o^2}{g\,L_o}$$

et

$$K_f = \frac{U_o^2}{k^2\,L_o^{4/3}\,I}$$

nous avons

$$\left.\begin{aligned} F_o\, M \frac{\partial^2 X}{\partial T^2} + \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{F_o}{3} N^2 \frac{\partial^2 N}{\partial T^2} + \frac{N^2}{2} \right) - M\, I \left(1 - K_f \frac{\frac{\partial X}{\partial T}\left|\frac{\partial X}{\partial T}\right|}{N^{4/3}}\right) = o \\ N \frac{\partial X}{\partial A} = M \end{aligned}\right\} \quad (10.3)$$

Nous aurons à résoudre ces équations avec des conditions initiales et des conditions aux limites dans un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace $[A, T]$. Nous voulons connaître la solution dans une position de canal comprise entre deux plans verticaux initialement distants de L, pendant un intervalle de temps τ. Le domaine $\mathcal{D}$ sera donc

$$\mathcal{D} = [o, L] \cdot [o, \tau]$$

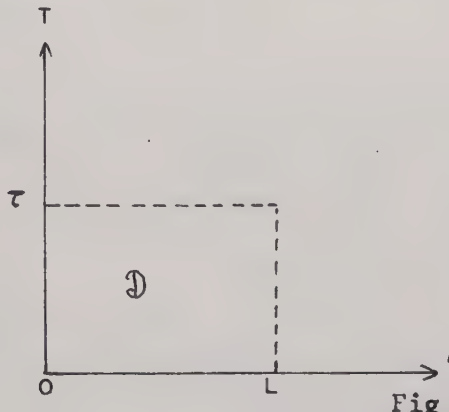


Fig 10.1

Cette solution dépendra évidemment des conditions imposées au temps $T = o$ (conditions initiales) ; ainsi que des conditions imposées aux limites de l'écoulement ($A = o$ et $A = L$) pendant un temps τ.

Connaissant les positions de toutes les particules de la surface libre à l'instant initial ($T = o$) tel que :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t}(A, o) = 0 \;; \quad X(A, o) = X_o(A) \quad \ldots. (10.4.1) \\ \frac{\partial N}{\partial t}(A, o) = 0 \;; \quad N(A, o) = N_o(A) \quad \ldots. (10.4.2) \end{aligned}\right\} \quad A \in [o, L]$$

le problème consiste à déterminer les trajectoires de ces particules pendant l'intervalle de temps τ, en sachant que durant cet intervalle les particules qui se trouvaient à l'instant initial en $A = o$ et $A = L$ ont évolué suivant des lois

$$\left.\begin{aligned} X(o, T) &= \alpha(T) \\ N(o, T) &= \gamma(T) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10.5)$$

ou suivant

$$\left.\begin{aligned} X(L, T) &= \beta(T) \\ N(L, T) &= \mu(T) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10.6)$$

$$T \in \left[o, \tau\right]$$

Pour savoir le nombre de conditions à imposer aux limites du domaine fluide considérons les caractéristiques des équations (10.1). Nous avons vu au chapitre VI que ces caractéristiques étaient doubles et formaient un réseau de droites parallèles aux axes O_a et O_t

$$\frac{da}{dt} = o, o, \infty, \infty$$

Dans le plan (A, T) nous aurons

$$\frac{dA}{dT} = o, o, \infty, \infty$$

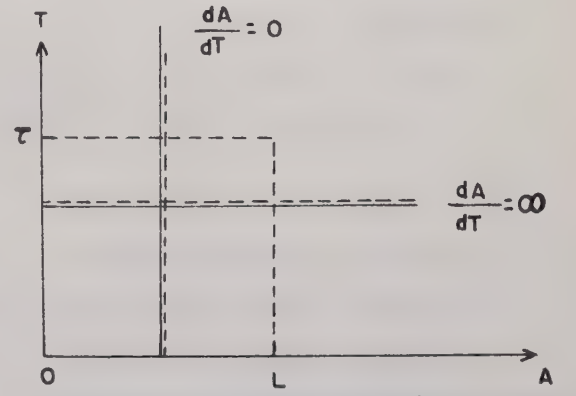


Fig 10.2 : Les caractéristiques

Nous aurons à imposer autant de condition à chacune des limites du domaine fluide qu'il y a de caractéristiques dans $\mathcal{D}$ qui proviennent de ces limites. Il n'y a qu'une seule caractéristique provenant de chacune des limites $A = o$ et $A = L$ qui pénètre dans $\mathcal{D}$. Il nous faudra donc imposer une seule condition à chacune de ces limites. Nous choisirons une des conditions (10.5) et(10.6).

Pour effectuer le calcul numérique de la solution nous considérerons un maillage recouvrant tout le domaine $\mathcal{D}$ et nous calculerons le vecteur $\vec{\xi}$ de composantes X et N aux noeuds de ce maillage ; c'est-à-dire que nous calculerons ce vecteur aux points de coordonnées $(n \Delta A, j \Delta T)$, ΔA et ΔT étant respectivement les pas du maillage suivant A et T. Les équations (10.3) seront approchées par des équations aux différences finies suivant un schéma numérique qui devra être consistant et stable et que nous allons étudier maintenant.

2 - LE SCHEMA NUMERIQUE D'INTEGRATION DES EQUATIONS DES ONDES LONGUES AVEC COURBURE.

Lorsque des équations aux dérivées partielles sont approchées par des équations aux différences finies, trois conditions sont à vérifier afin que l'approximation soit valable ; le schéma numérique devra être consistant, convergent et stable.

Pour que le schéma numérique soit consistant il faut que nous puissions retrouver les équations aux dérivées partielles lorsque nous ferons tendre ΔT et ΔA vers zéro dans les équations aux différences finies. Nous vérifierons cette condition avec les discrétisations que nous adopterons.

Lorsque nous approcherons les dérivées d'une fonction par rapport au temps par la différence entre les valeurs de ces fonctions aux différents étages en temps du maillage, nous commettrons une erreur d'approximation. Le schéma sera dit convergent lorsque la somme des erreurs d'approximation faites à chaque étage en temps reste bornée.

De même, la résolution d'un système numérique entraine obligatoirement des erreurs d'arrondi car pour chaque opération nous nous limiterons à un nombre fini - généralement assez faible - de décimales dans la précision des calculs. Le schéma numérique sera dit stable lorsque ces erreurs d'arrondi ne seront plus amplifiées par le calcul.

Toutefois, lorsque nous discrétiserons les équations aux dérivées partielles du problème suivant un schéma numérique nous nous contenterons de vérifier les conditions de consistance et de stabilité du schéma numérique car, en vertu du théorème d'équivalence de LAX, la stabilité est une condition nécessaire et suffisante de convergence pour un problème aux valeurs initiales "bien posé" approché par des équations aux différences finies consistantes. Ce théorème a été établi pour des systèmes linéaires et il n'est pas certain qu'il s'applique toujours pour des systèmes non linéaires; bien qu'il ait été utilisé par de nombreux auteurs pour l'étude de ces systèmes. Cette utilisation se justifie par l'expérience.

Il existe essentiellement deux types de méthodes numériques pour résoudre le problème posé plus haut : selon que - la solution étant déterminée à l'étage $j\Delta T$ - les dérivées en A font ou non intervenir des valeurs

de l'étage (j+1) ΔT, la méthode sera dite implicite ou explicite. Avec les schémas explicites la résolution se fait localement en chaque noeud de l'étage (j+1)ΔT. Par contre la résolution d'un système implicite nécessite la détermination simultanée de toutes les inconnues à l'étage (j+1) ΔT. Nous adopterons une méthode implicite pour résoudre les équations (10.3)

Les discrétisations utilisées font intervenir trois étages en temps (Fig 10.3) et elles sont les suivantes :

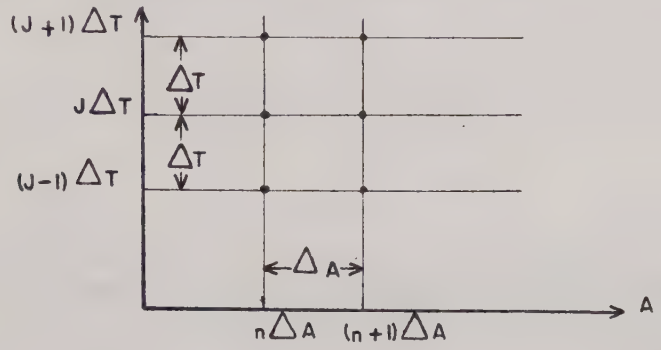


Fig 10.3

L'équation de continuité (la deuxième équation de (10.3)) sera approchée par la forme suivante, consistante au premier ordre pour le temps (n+1) ΔT.

$$(N_{n+1}^{j+1} + N_n^{j+1})(X_{n+1}^{j} - X_n^{j}) + (N_{n+1}^{j} + N_n^{j})(X_{n+1}^{j+1} - X_n^{j+1}) = 4\,M\,\Delta A$$

La discrétisation utilisée pour l'équation dynamique (première équation de (10.3)) est plus compliquée et nous en analyserons chaque terme :

- le terme $F_o\,M\,\dfrac{\partial^2 X}{\partial T^2}$ sera approché par

$$F_o\,M\,\frac{\partial^2 X}{\partial T^2} \simeq \frac{F_o\,M}{2\Delta T^2}\left[(X_{n+1}^{j+1} - 2\,X_{n+1}^{j} + X_{n+1}^{j+1}) + (X_n^{j+1} - 2\,X_n^{j} + X_n^{j-1})\right]$$

-le terme $\dfrac{\partial(\frac{1}{2}N^2)}{\partial A}$ sera pondéré sur les trois étages en temps (j-1) ΔT, j ΔT et (j+1) ΔT avec les coefficients 1, 2 et 1 respectivement ; nous aurons :

$$\frac{\partial(\frac{1}{2} N^2)}{\partial A} \simeq \frac{1}{8\Delta A} \left[2 \left(N_{n+1}^{j+1} \cdot N_n^{j-1} - N_n^{j+1} \cdot N_n^j \right) + \left(N_{n+1}^j + N_n^j \right) \left(N_{n+1}^j - N_n^j \right) \right.$$

$$\left. + \left(N_{n+1}^{j-1} + N_n^{j-1} \right) \left(N_{n+1}^{j-1} - N_n^{j-1} \right) \right]$$

où nous avons utilisé la propriété suivante du produit de deux fonctions

$$U^j V^j + U^{j+1} V^{j+1} = U^j V^{j+1} + U^{j+1} V^j + 0 (\Delta U \cdot \Delta V)$$

avec $\Delta U = U^{j+1} - U^j$

et $\Delta V = V^{j+1} - V^j$

- pour le terme $\frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{F_o}{3} N^2 \frac{\partial^2 N}{\partial T^2} \right)$ nous avons pris

$$\frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{F_o}{3} N^2 \frac{\partial^2 N}{\partial T^2} \right) \simeq \frac{F_o}{3\Delta A \, \Delta T^2} \left[\left(N_{n+1}^j \right)^2 \left(N_{n+1}^{j+1} - 2 N_{n+1}^j + N_{n+1}^{j-1} \right) \right.$$

$$\left. - \left(N_n^j \right)^2 \left(N_n^{j+1} - 2 N_n^j + N_n^{j-1} \right) \right]$$

- enfin, le terme de frottement sera approché par :

$$K_f \frac{\frac{\partial X}{\partial T} \left| \frac{\partial X}{\partial T} \right|}{N^{4/3}} \simeq \frac{K_f}{2 \Delta T^2 \left[\frac{1}{2} \left(N_{n+1}^j - N_n^j \right) \right]^{4/3}} \cdot \left[\left(X_{n+1}^{j+1} - X_{n+1}^j \right) \cdot \left| \left(X_{n+1}^j - X_{n+1}^{j-1} \right) \right| \right.$$

$$\left. + \left(X_n^{j+1} - X_n^j \right) \cdot \left| \left(X_n^j - X_n^{j-1} \right) \right| \right]$$

Après discrétisation les équations (10.3) deviennent :

- Equation de continuité

$$\left(N_{n+1}^j + N_n^j \right) \left(X_{n+1}^{j+1} - X_n^{j+1} \right) + \left(N_{n+1}^{j+1} + N_n^{j+1} \right) \left(X_{n+1}^j - X_n^j \right) = 4 M \Delta A \qquad (10.7.1)$$

- Equation dynamique

$$F_o\, M\, \Delta A \left[(X^{j+1}_{n+1} - 2\, X^{j}_{n+1} + X^{j-1}_{n+1}) + (X^{j+1}_{n} - 2\, X^{j}_{n} + X^{j-1}_{n}) \right.$$

$$+ \frac{\Delta T^2}{4} \left[2\,(N^{j+1}_{n+1} \cdot N^{j}_{n+1} - N^{j+1}_{n} \cdot N^{j}_{n}) + (N^{j}_{n+1} + N^{j}_{n})\,(N^{j}_{n+1} - N^{j}_{n}) + (N^{j-1}_{n+1} + N^{j-1}_{n}) \right.$$

$$\left. (N^{j-1}_{n+1} - N^{j-1}_{n}) \right]$$

$$+ \frac{2\,F_o}{3} \left[(N^{j}_{n+1})^2\, (N^{j+1}_{n+1} - 2\, N^{j}_{n+1} + N^{j-1}_{n+1}) - (N^{j}_{n})^2\, (N^{j+1}_{n} - 2\, N^{j}_{n} + N^{j-1}_{n}) \right.$$

$$+ \frac{M\, I\, K_f\, \Delta A}{\left[\frac{1}{2}\,(N^{j}_{n+1} + N^{j}_{n})\right]^{4/3}} \left[(X^{j+1}_{n+1} - X^{j}_{n+1}) \left| (X^{j}_{n+1} - X^{j-1}_{n+1}) \right| + (X^{j+1}_{n} - X^{j}_{n}) \left| (X^{j}_{n} - X^{j-1}_{n}) \right| \right]$$

$$= 2\, M\, I\, \Delta A\, \Delta T^2 \qquad \ldots\ldots\ (10.7.2)$$

Avant de présenter l'algorithme de résolution de ces équations nous analyserons la stabilité numérique du schéma.

3 - ANALYSE DE LA STABILITE DU SCHEMA NUMERIQUE.

Nous étudierons la stabilité numérique du schéma présenté plus haut par le critère de VON NEWMANN, valable pour des équations linéaires. Du fait de la non linéarité du système à intégrer cette étude ne sera pas déterminante mais permettra de se faire une idée de la stabilité locale du schéma. Nous allons donc reprendre les équations aux différences finies (10.7) - dans lesquelles nous supprimerons le terme de frottement et tous les seconds membres qui n'ont pas d'influence sur la stabilité - en considérant localement certaines valeurs de X et de N comme des coefficients. Nous écrirons donc les équations (10.7) sous la forme :

$$2\,\overline{N}\, (X^{j+1}_{n+1} - X^{j+1}_{n}) + \overline{\Delta X}\, (N^{j+1}_{n+1} + N^{j+1}_{n}) = 0 \qquad \ldots\ldots\ (10.8.1)$$

et

$$\frac{F_o\, M\, \Delta A}{2\, \Delta T^2}\left[(X_{n+1}^{j+1} + X_n^{j+1}) - 2\,(X_{n+1}^{j} + X_n^{j}) + (X_{n+1}^{j-1} + X_n^{j-1})\right]$$

$$+\left[\frac{\overline{N}}{4} + \frac{F_o\, \overline{N}^{\,2}}{3\, \Delta T^2}\right]\left[(N_{n+1}^{j+1} - N_n^{j+1}) + (N_{n+1}^{j-1} - N_n^{j-1})\right]$$

$$-\left[\frac{2\, F_o\, \overline{N}^{\,2}}{3\, \Delta T^2} - \frac{\overline{N}}{4}\right]\,(N_{n+1}^{j} - N_n^{j}) = 0 \qquad \ldots\ldots (10.8.2)$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} P_n^{j+1} &= X_n^j \\ \text{et} \qquad Q_n^{j+1} &= N_n^j \end{aligned}\right\} \qquad (10.9)$$

Nous supposerons le problème périodique et nous prendrons les séries de FOURIER suivantes :

$$X_n^j = \sum_k \theta_1^j(k)\, e^{\,ik\,n\,\Delta A}$$

$$N_n^j = \sum_k \theta_2^j(k)\, e^{\,ik\,n\,\Delta A}$$

$$P_n^j = \sum_k \theta_3^j(k)\, e^{\,ik\,n\,\Delta A}$$

$$Q_n^j = \sum_k \theta_4^j(k)\, e^{\,ik\,n\,\Delta A}$$

Comme le système est linéaire il suffit d'analyser le $k^{ième}$ terme des séries de FOURIER. Nous substituerons ces valeurs dans (10.8) et (10.9) pour avoir

$$B\ \vec{\theta}^{\,j+1} = D\ \vec{\theta}^{\,j} \qquad \ldots\ldots \qquad (10.10)$$

où $\vec{\theta^j}$ est le vecteur de composantes θ^j_1, θ^j_2, θ^j_3 et θ^j_4, et où B et D sont les matrices

$$B = \begin{Bmatrix} 2\,ai\sin\alpha & 2\,b\cos\alpha & 0 & 0 \\ 2\,c\cos\alpha & 2\,di\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

et

$$D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4\,c\cos\alpha & 2\,pi\sin\alpha & -2c\cos\alpha & -2\,di\sin\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Nous avons posé

$$a = 2\,\overline{N} \qquad b = \Delta\overline{X} \qquad c = F_o\,M\,\Delta A/2\,\Delta T^2 \qquad d = \left[\frac{\overline{N}}{4} + \frac{F_o\,\overline{N}^2}{3\,\Delta T^2}\right]$$

$$p = \left[\frac{2\,F_o\,\overline{N}}{3\,\Delta T^2} - \frac{\overline{N}}{4}\right] \text{ et } \alpha = \frac{1}{2}\,k\,\Delta A$$

Nous multiplierons la relation vectorielle (10.10) à gauche par la matrice inverse B^{-1}, il vient

$$\vec{\theta}_{j+1} = G\,\vec{\theta}_j$$

avec $$G = B^{-1}\,.\,D$$

G est appelée la matrice d'amplification ; nous trouvons

$$G = \begin{Bmatrix} \frac{2\,bc}{f}\cos^2\alpha & \frac{bp}{f}\, i \sin\alpha\cos\alpha & \frac{bc}{f}\cos^2\alpha & -\frac{bd}{f}\, i \sin\alpha\cos\alpha \\ -\frac{2\,ac}{f}\, i \sin\alpha\cos\alpha & \frac{ap}{f}\sin^2\alpha & \frac{ac}{f}\, i \sin\alpha\cos\alpha & \frac{da}{f}\sin^2\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

en posant $\quad f = ad \sin^2\alpha + bc \cos^2\alpha$

Nous chercherons les valeurs propres λ_i de la matrice d'amplification ; pour cela nous calculerons le déterminant

$$\det \left[G - \lambda I \right] = 0$$

où I est la matrice unité.

L'équation caractéristique s'écrit

$$\lambda 2 \left[\lambda 2 - \left(\frac{2\,bc}{f}\cos^2\alpha + \frac{ap}{f}\sin^2\alpha \right) \lambda + 1 \right] = 0$$

et admet pour racines

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{\mu - \varepsilon\, i\, \nu}{\mu + \varepsilon\, i\, \nu}$$

avec $\quad \varepsilon = \pm 1$

$$\mu = \frac{\overline{\Delta X}\, F_o\, M\, \Delta A}{2\, \Delta T^2}\cos^2\alpha + \frac{2}{3}\,\frac{F_o\, \overline{N}^3}{\Delta T^2}\sin^2\alpha$$

et $\quad \nu = \frac{\overline{N}^2}{4}\sin^2\alpha$

Nous voyons que la condition de stabilité de VON NEWMANN qui est - (Cf ISAACSON et KELLER ch. 9 § 5.2) -

$$\| \lambda \| \leq 1 + 0(\Delta T) \qquad \forall \ k$$

est toujours vérifiée. Le schéma numérique est donc inconditionnellement stable.

4 - L'ALGORITHME DE RESOLUTION : ALGORITHME DE RICHTMYER

Les équations aux différences finies (10.7) peuvent se mettre sous la forme

$$C_n \vec{\xi}_{n+1} = E_n \vec{\xi}_n + F_n \qquad \ldots\ldots (10.11)$$

avec

$$\vec{\xi}_n = \begin{bmatrix} X_n^{j+1} \\ N_n^{j+1} \end{bmatrix}$$

$$C_n = \begin{Bmatrix} (N_{n+1}^j + N_n^j) & (X_{n+1}^j - X_n^j) \\ FM\Delta A + \dfrac{MIK_f \Delta A \left[\left| (X_{n+1}^j - X_{n+1}^{j-1}) \right| \right]}{\left[\frac{1}{2} (N_{n+1}^j + N_n^j) \right]^{4/3}} & \left[\dfrac{\Delta T^2}{2} N_{n+1}^j + \dfrac{2 F_o}{3} (N_{n+1}^j)^2 \right] \end{Bmatrix}$$

$$E_n = \begin{Bmatrix} (N_{n+1}^j + N_n^j) & -(X_{n+1}^j - X_n^j) \\ \left\{ FM\Delta A - \dfrac{MI.K_f \Delta A \left[\left| (X_n^j - X_n^{j-1}) \right| \right]}{\left[\frac{1}{2} (N_{n+1}^j + N_n^j) \right]^{4/3}} \right. & \left[\dfrac{\Delta T^2}{2} N_n^j + \dfrac{2 F_o}{3} (N_n^j)^2 \right] \end{Bmatrix}$$

et

$$\tilde{F}_n = \begin{cases} \dfrac{4\,M\,\Delta A}{F_o M \Delta A \left[2\,(X^j_{n+1} + X^j_n) - (X^{j-1}_{n+1} + X^{j-1}_n)\right] - (N^j_{n+1})^2 \left[\dfrac{\Delta T^2}{4} - \dfrac{4\,F_o}{3} N^j_{n+1}\right]} \\ + (N^j_n)^2 \left[\dfrac{\Delta T^2}{4} - \dfrac{4\,F_o}{3} N^j_n\right] + \dfrac{MIK_f \Delta A}{\left[\frac{1}{2}(N^j_{n+1} + N^j_n)\right]^{4/3}} \left[X^j_{n+1} \left| (X^j_{n+1} - X^{j-1}_{n+1}) + X^j_n - \right| (X^j_n - X^{j-1}_n) \right| \right] \\ - N^{j-1}_{n+1} \left[\dfrac{2\,F_o}{3} (N^j_{n+1})^2 + \dfrac{\Delta T^2}{4} N^{j-1}_{n+1}\right] + 2\,MI\Delta A \Delta T^2 + N^{j-1}_n \left[\dfrac{\Delta T^2}{4} N^{j-1}_n + \dfrac{2\,F_o}{3} (N^j_n)^2\right] \end{cases}$$

Nous multiplierons la relation (10.11) à gauche par la matrice inverse C_n^{-1} ; il vient, en supposant $\det |C_n| \neq 0$

$$\vec{\xi}_{n+1} = R_n \vec{\xi}_n + \vec{S}_n \qquad \ldots\ldots (10.12)$$

avec $R_n = C_n^{-1} \cdot E_n$

et $\vec{S}_n = C_n^{-1} \cdot \vec{F}_n$

A chaque étage en temps les conditions aux limites du problème nous donneront

- pour $n = 1$ (en $A = o$) $\quad \tilde{F}_1 \vec{\xi}_1 = \vec{\nu}^*_1 \qquad \ldots\ldots (10.13)$
- pour $n = n\ max$ (en $A = L$) $\quad \tilde{F}_{n\ max} \vec{\xi}_{n\ max} = \vec{\nu}^*_{n\ max} \quad (j = 1,2,\ldots, n\ max)$

$n\ max$ et $j\ max$ étant définis par :

$$\tau = j \text{ max } . \Delta T$$

et $$L = (n \text{ max} - 1) . \Delta A$$

Nous résoudrons le problème aux limites par la méthode du double balayage.

Les relations (10.13) sont dites relations d'impédance. Nous pouvons établir par récurrence une relation d'impédance pour chaque n en partant soit de n = 1, soit de n = n max. En effet, supposons que l'on ait à l'indice n+1 une relation d'impédance de la forme

$$F_{n+1} \vec{\xi}_{n+1} = \vec{\nu}_{n+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, j \text{ max})$$

En substituant l'équation (11.12) dans cette relation nous trouvons

$$F_{n+1} . R_n \vec{\xi}_n = \vec{\nu}_{n+1} - F_{n+1} S_n \qquad (j = 1, 2, \ldots, j \text{ max})$$

Mais, nous avons aussi

$$F_n \vec{\xi}_n = \vec{\nu}_n \qquad (j = 1, 2, \ldots, j \text{ max})$$

d'où nous tirons

$$F_n = F_{n+1} R_n$$

et $$\vec{\nu}_n = \vec{\nu}_{n+1} - F_{n+1} \vec{S}_n$$

Partant de n = n max nous pouvons remonter ainsi par récurrence jusqu'à l'indice 1 ; nous serons alors en présence de la relation

$$F_1 \vec{\xi}_1 = \vec{\nu}_1$$

et de la relation $$\tilde{F}_1 \vec{\xi}_1 = \vec{\nu}_1^*$$

qui nous est donnée par la condition à la limite en A = o du domaine. Nous aurons alors deux équations linéaires à deux inconnues qui nous permettent

de résoudre en X_1 et N_1 et donc de calculer les composantes du vecteur $\vec{\xi}_1$.

Ensuite, dans un second balayage de $n = 2$ à $n = n$ max, nous utiliserons la relation (10.12) pour calculer les composantes du vecteur $\vec{\xi}_n$ à tous les membres du maillage à l'étage $(j+1)\ \Delta T$.

La prise en compte d'un fond variable alourdit le calcul mais ne pose pas de difficultés particulières car au départ nous nous donnons la loi $H = H(X)$ qui décrit le fond et par conséquent nous connaîtrons

$$I(X) = \frac{dH}{dx}$$

A chaque étage en temps, ayant déterminé la valeur de X il suffira de calculer la pente correspondante avant de passer au calcul de la solution à l'étage en temps suivant. Evidemment si le fond est linéaire, la pente I sera constante et cette étape du calcul sera évitée.

5 - METHODE DE RESOLUTION EN PRESENCE DE DISCONTINUITES DANS LA SOLUTION.

Nous avons calculé les équations du choc au chapitre VII en supposant que la solution des équations des ondes longues avec courbure se comporte comme la solution des équations des ondes longues sans courbure et qu'elle admet des discontinuités. Lorsque nous utiliserons la méthode numérique exposée plus haut nous devrons mettre en oeuvre un moyen pratique pour détecter les les disconuités et pour calculer la solution en présence de ces discontinuités.

5.1 - La détection des chocs.

Nous avons vu au chapitre VI le rôle primordial des pseudo-caractéristiques dans la propagation des ondes longues avec courbure. Il existe deux familles de pseudo-caractéristiques dont les pentes sont respectivement

- famille C^+ : $\frac{da}{dt} = \frac{\eta}{h}\sqrt{g\eta}$

- famille C^- : $\frac{da}{dt} = -\frac{\eta}{h}\sqrt{g\,\eta}$

sur lesquelles nous trouvons les invariants de RIEMANN suivants ;lorsque nous négligeons le frottement et que nous supposons un canal à fond horizontal.

$$u + 2\sqrt{g\eta} = Cte \quad sur \quad C^+$$
$$u - 2\sqrt{g\eta} = Cte \quad sur \quad C^-$$

Aux points où deux pseudo-caractéristiques se coupent, nous savons que la solution obtenue en négligeant la courbure des filets liquides admet des discontinuités. A condition que cette courbure ne soit pas trop importante, nous pourrons utiliser ce critère pour détecter avec une assez bonne approximation les points où apparaissent les discontinuités.

Supposons que nous ayons déterminé complètement jusqu'à l'étage j. ΔT la solution du problème aux conditions initiales et aux conditions aux limites posé au paragraphe 2. Nous voulons savoir si la solution ne présentera pas de discontinuités à l'étage (j+1) ΔT.

Soient deux points A_1 et A_2 dont les coordonnées dans le plan (A, T) sont respectivement (n ΔA, j ΔT) et ((n+1) ΔA, j ΔT). En supposant que la perturbation de la surface libre se propage de droite à gauche, calculons la pente des caractéristiques C^- qui passent par ces points

$$C_1^- = -\frac{\eta_1}{h_1}\sqrt{g\,\eta_1} \qquad \text{en } A_1 = n\,\Delta A$$

$$C_2^- = -\frac{\eta_2}{h_2}\sqrt{g\,\eta_2} \qquad \text{en } A_2 = (n+1)\,\Delta A$$

η_1, η_2 et h représentent respectivement les tirants d'eau en A_1 et A_2 et le tirant d'eau moyen.

L'intervalle ΔT étant très petit nous pourrons approcher les caractéristiques par des droites dans cet intervalle. Supposons que les caractéristiques passant en A_1 et A_2 se coupent au point M de coordonnées (A_m, T_m) tel que

$$T_m \leq (j+1)\,\Delta T$$

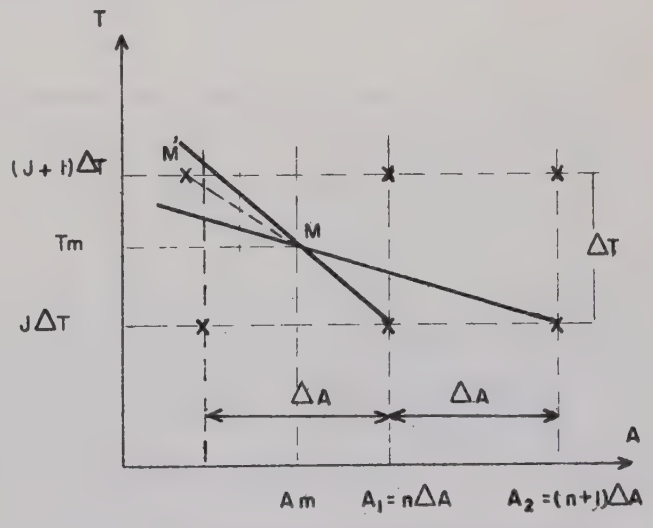


fig. 10.4

Nous aurons en ce point

$$A_m = \bar{C_1} \cdot T_m + \zeta_1 \qquad \ldots\ldots (10.14.1)$$

et aussi

$$A_m = \bar{C_2} \cdot T_m + \zeta_2 \qquad \ldots\ldots (10.14.2)$$

avec

$$\zeta_1 = A_1 - \bar{C_1} \cdot j\Delta T = n\Delta A - \bar{C_1}\, j\, \Delta T$$

et

$$\zeta_2 = A_2 - \bar{C_2} \cdot j\Delta T = (n+1)\Delta A - \bar{C_2}\, j\, \Delta T$$

$\bar{C_1}$, $\bar{C_2}$, ζ_1 et ζ_2 étant complètement déterminés par les valeurs de η et de h en A_1 et A_2, il vient :

$$T_m = \frac{(\zeta_1 - \zeta_2)}{(\bar{C_2} - \bar{C_1})}$$

ou encore

$$T_m = j\,\Delta T - \frac{\Delta A}{(\bar{C_2} - \bar{C_1})}$$

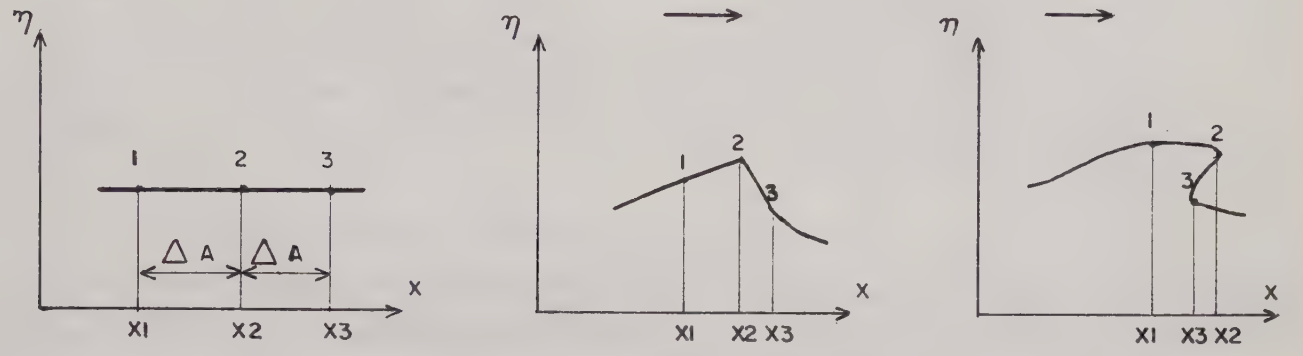
Ayant calculé T_m nous utiliserons une des équations (10.14) pour déterminer A_m. S'il existe un point M dans l'intervalle $(j\,\Delta T, (j+1)\Delta T)$ où les pseudo-caractéristiques se coupent, il y aura un choc à l'étage $(j+1)\,\Delta T$ en M'.

Pour obtenir les coordonnées du point M' on commence par résoudre les équations du choc définies au chapitre VII pour calculer la vitesse de déplacement C de ce choc en M dans le plan (A, T). Ayant obtenu cette vitesse il est facile de calculer les coordonnées du point M'.

Ce test est un moyen très simple pour détecter le point de formation du choc. Il convient toutefois de remarquer que pour qu'il soit applicable il faut choisir les pas d'intégration ΔA et ΔT tels que le rapport $\frac{\Delta A}{\Delta T}$ soit compatible avec la vitesse de déplacement C_{max} de la plus

grosse perturbation. Il faut prendre $\frac{\Delta T}{\Delta A} C_{max} \geq 1$.

Il est possible d'envisager d'autres critères pour détecter le point de formation des discontinuités. Soit $X(j, n)$ l'abscisse au temps $T_d = j \Delta T$ d'une particule qui se trouvait au temps $T = o$ en $A = n \Delta A$. Lorsque le front de l'onde se raidit l'abscisse de deux sections voisines - au voisinage du front- se rapprochent (Fig 10.5.b), et s'inversent lorsque l'onde a déferlé (Fig 10.5.c). Un autre test pour détecter la formation des disconuités consiste



a: Etat initial : le repos b: onde avant déferlement c: onde au déferlement

Fig 10.5

donc à déterminer l'instant où deux sections voisines s'inversent. Pratiquement un choc sera mis en place dès que l'écart entre ces deux abscisses deviendra inférieur à une certaine valeur choisie arbitrairement et qui doit être une fraction du pas ΔA.

5.2 - La résolution des équations du choc.

Nous avons vu au chapitre VII que les équations du choc sont

$$\left.\begin{aligned} & C.\left[U.h\right] - \frac{1}{2} g \left[\alpha \eta^2\right] = 0 \\ \text{et} \quad & C.\left[\frac{h}{\eta}\right] + \left[U\right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10.15)$$

où $\left[f\right]$ représente le saut de la fonction f au choc

$$\left[f\right] = f_2 - f_1$$

Nous avons posé $\alpha = 1 + \frac{2\Gamma}{3g}$

Γ étant l'accélération verticale supposée constante au choc.

Nous supposerons un choc situé en M' à l'étage (j+1) ΔT. La solution étant complètement déterminée à l'étage j ΔT nous voulons résoudre les équations du choc en M'.

Nous conviendrons d'appeler l'état 1, l'état à droite du choc et l'état 2, l'état à gauche du choc ; celui-ci se déplaçant de droite à gauche dans le plan (A, T).

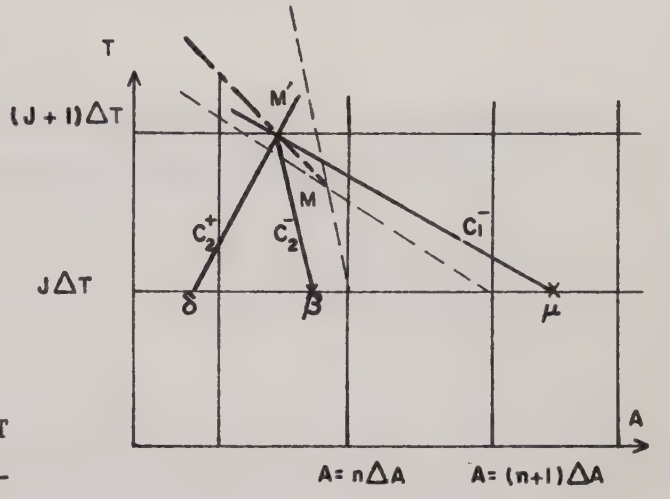


Fig 10.6

——·——· trajectoire du choc.

Ayant déterminé le point M' où se trouve le choc à l'étage (j+1) ΔT nous allons, par interpolation, rechercher les points β et μ (Fig 10.6) où passent les deux pseudo-caractéristiques C_1^- et C_2^- qui se coupent en M'. Par le même procédé nous déterminerons le point δ de l'étage j ΔT où passe la pseudo-caractéristique C_2^+ qui intersecte l'étage (j+1) ΔT en M'. Sur ces pseudo-caractéristiques nous avons les invariants suivants :

$$U_1 - 2\sqrt{g\eta}_1 = K\mu \qquad \text{sur } C_1^-$$

$$U_2 - 2\sqrt{g\eta}_2 = K\beta \qquad \text{sur } C_2^-$$

$$U_2 + 2\sqrt{g\eta}_2 = K\delta \qquad \text{sur } C_2^+$$

Les constantes $K\mu$, $K\beta$ et $K\delta$ étant données par

$$K_\mu = U - 2\sqrt{g\eta}_\mu$$

$$K_\beta = U_\beta - 2\sqrt{g\eta}_\beta$$

et $$K_\delta = U\delta + 2\sqrt{g\eta}_\delta$$

Dans ces équations nous n'avons pas tenu compte de la pente du fond et du frottement ; toutefois leur prise en compte ne pose pas de difficultés particulières car les invariants prennent alors la forme suivante :

$$U_i \pm 2\sqrt{g}\,\eta_i - \int_{T=n\Delta T}^{T=(n+1)\Delta T} \left(I - \frac{U\,|U|}{k^2 \eta^{4/3}}\right) dt = Cte$$

Les valeurs de U et η dans l'intégrale sont le plus généralement estimées à l'étage $j\,\Delta T$ mais peuvent aussi être implicitées sur l'étage $(j+1)\,\Delta T$.

En ne tenant pas compte de la pente du fond et du frottement nous résoudrons les 5 équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&Ch\left[U_2 - U_1\right] - \frac{1}{2} g \left[{}^{2}_{2} - \eta^{2}_{1}\right] = 0 \\
&\frac{Ch}{\eta_1 \eta_2}\left[\eta_2 - \eta_1\right] - \left[U_2 - U_1\right] = 0 \\
&U_1 - 2\sqrt{g}\,\eta_1 = K\mu \\
&U_2 - 2\sqrt{g}\,\eta_2 = K\beta \\
&U_2 + 2\sqrt{g}\,\eta_2 = K\delta
\end{aligned}\right\} \qquad (10.16)$$

Pour obtenir ces équations nous avons supposé

$$\alpha = 1$$

dans les équations (10.15) ce qui revient à supposer une accélération verticale nulle au choc.

La résolution des deux dernières équations de ce système nous donne

$$\left.\begin{aligned}
U_2 &= \frac{1}{2}(K\delta + K\beta) \\
\eta_2 &= \frac{(K\delta - K\beta)^2}{(16.g)}
\end{aligned}\right\} \qquad (10.17)$$

et

La 3ème équation de (10.16) nous donnera U_1 en fonction de η_1

$$U_1 = K\mu + 2\sqrt{g\,\eta_1} \qquad \ldots\ldots (10.18)$$

Eliminons Ch des deux premières équations de (10.16) et substituons la valeur de (10.18) dans l'équation ainsi obtenue nous aurons

$$\frac{1}{2} g \eta_1^2 + g\sqrt{2}\eta_2 \eta_1^{3/2} - \left[\sqrt{\frac{1}{2}} g \eta_2 \left[U_2 - K\mu\right] - g\eta_2\sqrt{2}\right]\eta_1$$

$$- \eta_2 \left[U_2 - K\mu\right]\sqrt{\frac{g}{2}} \cdot \eta_1^{1/2} - \frac{1}{2} g \eta_2^2 = 0$$

U_2 et η_2 étant déterminés par (10.17) nous calculerons η_1 en résolvant l'équation du 4ème degré obtenu en posant :

$$\phi = \eta_1^{1/2} \qquad \ldots\ldots (10.19)$$

$$\phi^4 + 2\sqrt{2}\eta_2 \phi^3 - \left\{(U_2 - K\mu)\sqrt{\frac{2\,\eta_2}{g}} - 2\,\eta_2\sqrt{2}\right\}\phi^2$$

$$-\left\{\eta_2 \left[U_2 - K\mu\right]\sqrt{\frac{2}{g}}\right\}\phi - \eta_2^2 = 0$$

Nous choisirons la racine ϕ_i qui nous donne un saut dans le bon sens, c'est-à-dire tel que $\eta_1 \geq \eta_2$ (voir Fig 10.7) et qui nous donne aussi une valeur de C

$$C = \frac{\left[U_2 - U_1\right]}{\left[\eta_2 - \eta_1\right]} \cdot \frac{\eta_1\ \eta_2}{h} \qquad \ldots (10.20)$$

comprise entre C_1 et C_2. Nous ne garderons bien entendu que les racines ϕ_i qui sont réelles pour calculer η_1 à partir de (10.19).

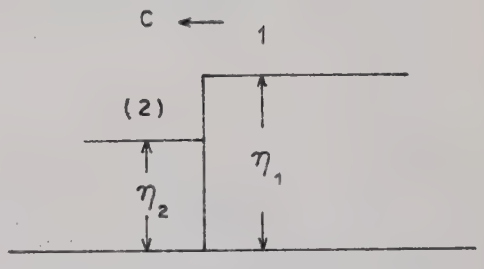


Fig : 10.7

5.3 - La propagation du choc.

Ayant obtenu la vitesse du choc en M' à l'étage (j+1) ΔT, nous prolongerons linéairement la trajectoire du choc sur l'étage (j+2) ΔT jusqu'en M" (Fig 10.8). En M" nous résoudrons les équations du choc.

Ayant calculé sa vitesse de déplacement en M" nous prolongerons sa trajectoire jusqu'en M"' et ainsi de suite.

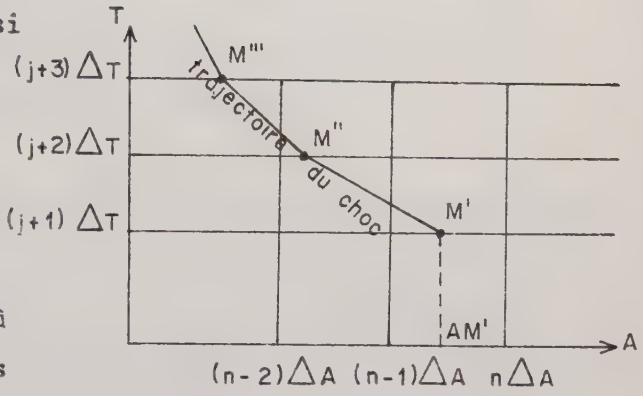


Fig 10.8

Nous voyons sur la figure (10.8) que la trajectoire du choc sépare le domaine d'intégration en deux parties, à partir du temps T_d où ce choc s'est formé. Nous ne pourrons donc plus faire un double balayage dans tout le domaine $\mathcal{D}$ pour $T \geq T_d$. Soit $A_d(T)$ la position du choc au temps T ($T \geq T_d$). Nous allons scinder le domaine d'intégration en deux parties, l'une située à droite et l'autre à gauche du choc. Nous appellerons ces nouveaux domaines $\mathcal{D}_d$ et $\mathcal{D}_g$ (Fig 10.9)

$$\mathcal{D}_g = \left[o, A_d(T)\right] \left[T_d, \tau\right]$$

$$\mathcal{D}_d = \left[A_d(T), L\right] \left[T_d, \tau\right]$$

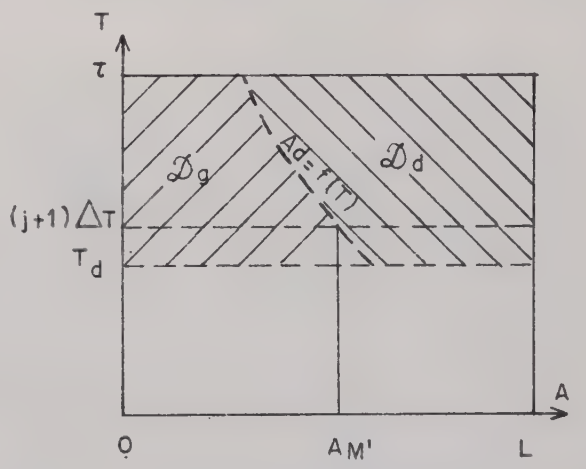


Fig 10.9

----- Trajectoire du choc.

Dans une première étape de la résolution nous calculerons la solution à l'étage $(j+1)\,\Delta T$, dans le domaine $\mathcal{D}_d$, à tous les noeuds du maillage compris entre $A = A_{M'}$ et $A = L$. Nous conserverons la condition aux limites en $A = L$ et nous prendrons comme condition aux limites en $A = A_{M'}$ le tirant d'eau à droite du choc

$$N\left(A_{M'}, (j+1)\,\Delta T\right) = \eta_1$$

Ayant déterminé la solution à l'étage $(j+1)\,\Delta T$ dans $\mathcal{D}_d$ nous calculerons la solution par un double balayage dans le domaine $\mathcal{D}_g$ de $A = o$ à $A = A_{M'}$ en conservant la condition aux limites en $A = o$ et en prenant comme nouvelle condition aux limites en $A_{M'}$ le tirant d'eau à gauche du choc.

Puisque nous connaîtrons la vitesse de déplacement du choc en $A_{M'}$ à l'étage $(j+1)\ \Delta T$ nous pourrons calculer sa position à l'étage $(j+2)\ \Delta T$, ce qui nous fixera les limites des domaines d'intégration à cet étage en temps et nous permet d'y calculer la solution.

Il nous faut faire très attention dans la résolution des équations discrétisées au voisinage du choc car cette résolution à l'étage $(j+1)\ \Delta T$ fait intervenir les valeurs des fonctions N et X aux deux étages en temps précédents. Nous examinerons les deux cas suivants, selon que la position du choc est dans le même pas en A qu'aux étages en temps précédents ou non.

Cas N°1 : Le choc se trouve dans le même pas en A qu'aux étages en temps précédents. (Fig 10.10). Dans ce cas nous utiliserons les invariants de RIEMANN sur les pseudo-caractéristiques qui passent en P pour calculer N en ce point

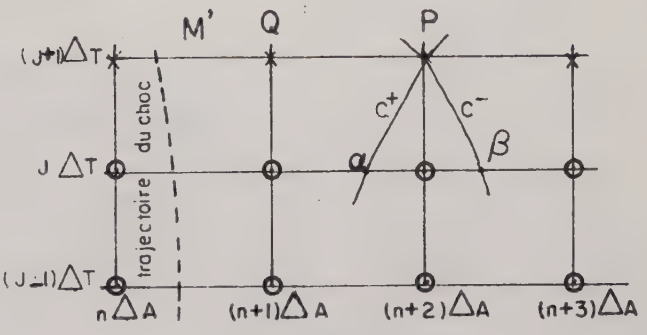


Fig 10.10

⊙ Points où la solution est connue

x Points ù la solution est à déterminer

$$U_p + 2\sqrt{g}\,N_p = U\alpha + 2\sqrt{g}\,N\alpha \qquad \text{sur } C^+$$

$$U_p - 2\sqrt{g}\,N_p = U\alpha - 2\sqrt{g}\,N\alpha \qquad \text{sur } C^-$$

ayant déterminé $N\ (\ (n+2)\ \Delta A,\ (j+1)\ \Delta T) = N_p$ nous le prendrons comme condition aux limites à droite du choc et nous ferons un double balayage de $A = (n+2)\ \Delta A$ à $A = L$ pour déterminer la solution à l'étage $(j+1)\ \Delta T$ à droite du choc. Pour calculer la solution au point Q d'abscisse $(\ (n+1)\ \Delta A,\ (j+1)\ \Delta T)$ nous ferons une interpolation entre les valeurs de N et de X en P et ces valeurs en M' que nous avons obtenu en résolvant les équations du choc. Nous ferons de même dans le domaine d'intégration qui se trouve à gauche du choc et nous calculerons par interpolation les valeurs de N et X au noeud le plus voisin de la trajectoire de choc.

Cas N° 2 : Le choc ne se trouve pas dans le même pas en A qu'aux étages en temps précédents (Fig 10.11). Ce cas n'est pas très différent du premier sauf qu'il faudra calculer la solution aux deux noeuds R' et Q' par interpolation entre les valeurs de X et de N en M' et P'.

x Points où la solution est connue

O Points où la solution est à déterminer

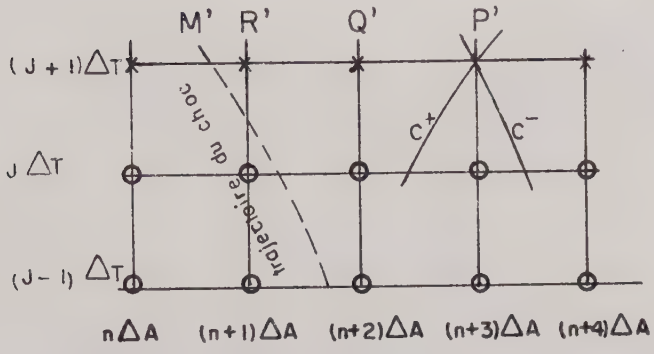


Fig 10.11)

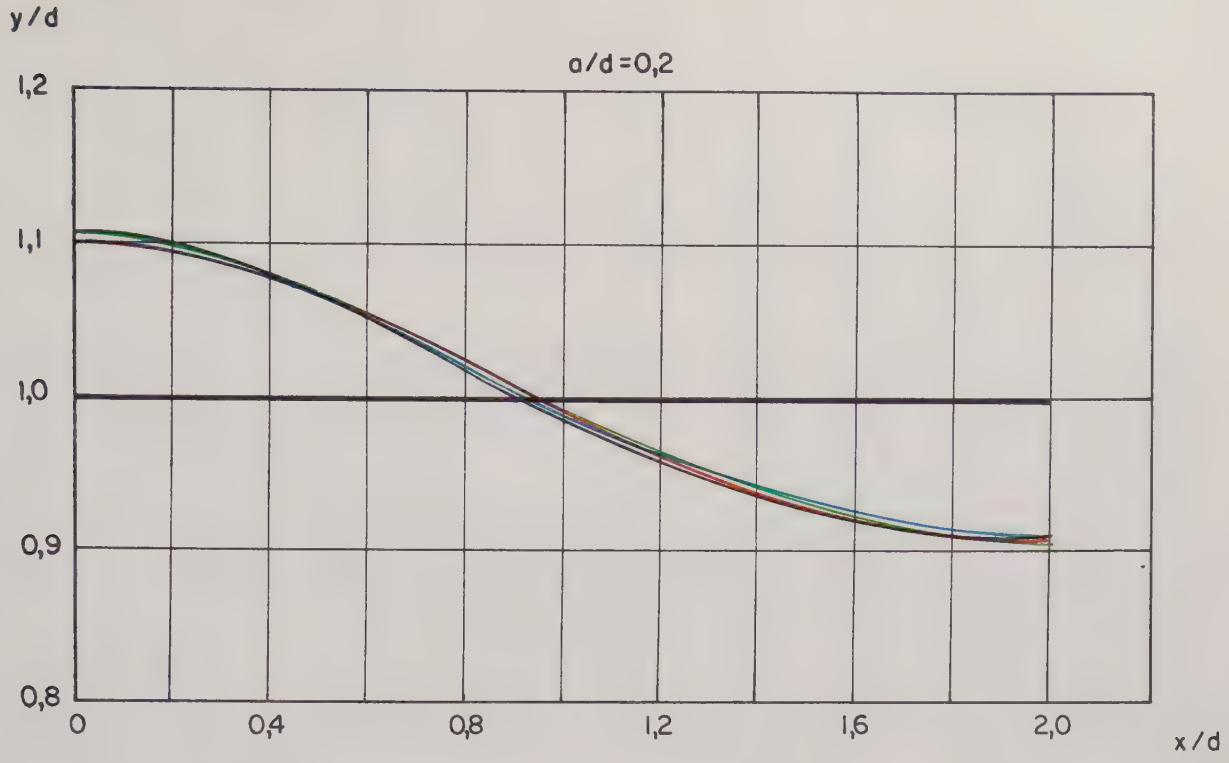
6 - CONCLUSIONS.

Nous avons donné dans ce chapitre une méthode numérique qui permet d'intégrer les équations des ondes longues avec courbure avec des conditions initiales et des conditions aux limites. Nous avons programmé cette méthode pour obtenir un code de calcul des ondes longues avec courbure. Ce code de calcul permet la simulation sur ordinateur de la propagation des ondes de gravité en eau peu profonde.

ANNEXE I

FIGURES

COMPARAISON DES SURFACES LIBRES DE LA HOULE CNOIDALE ET DE LA HOULE DE STOKES



Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

Houle de Stokes de troisième approximation

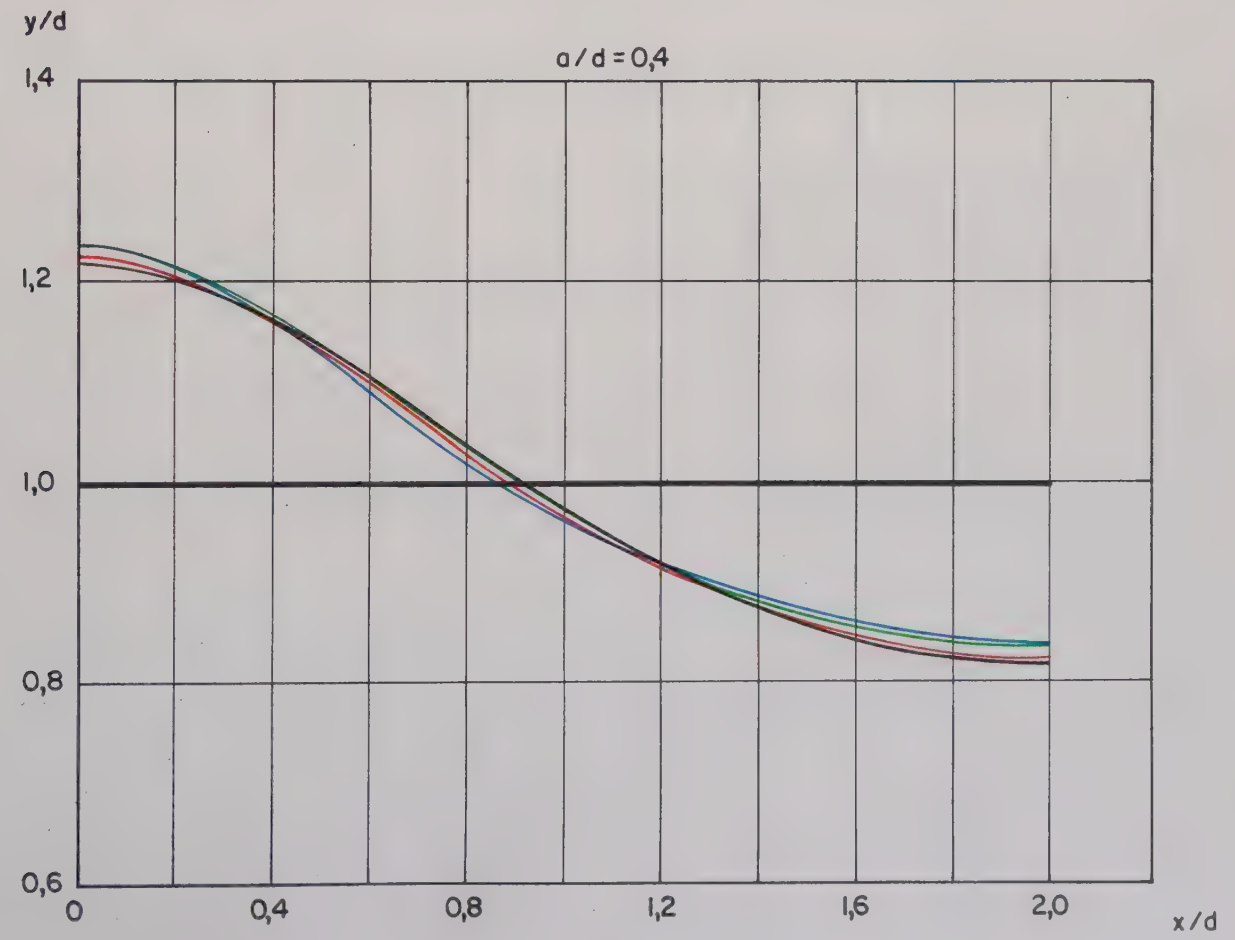
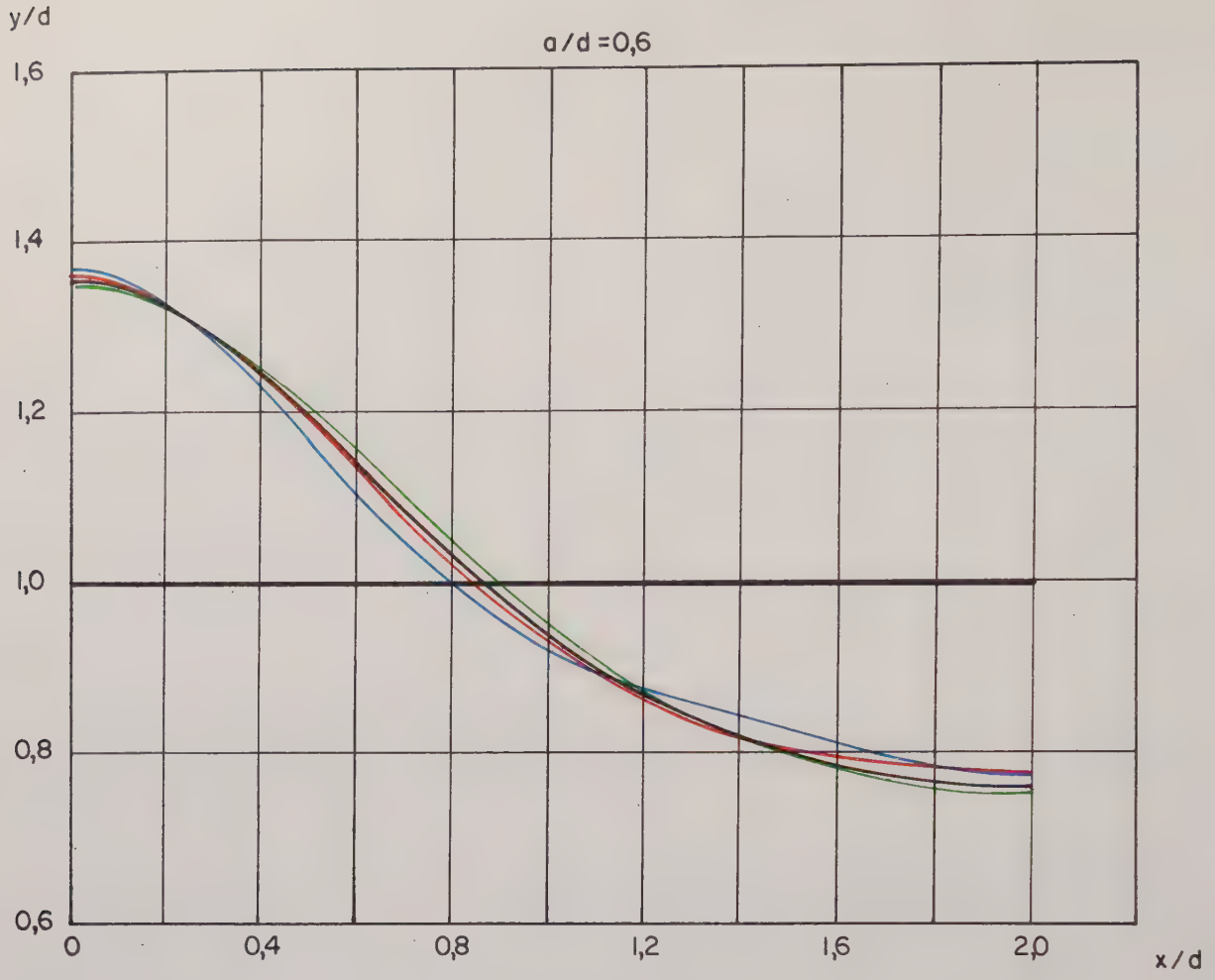
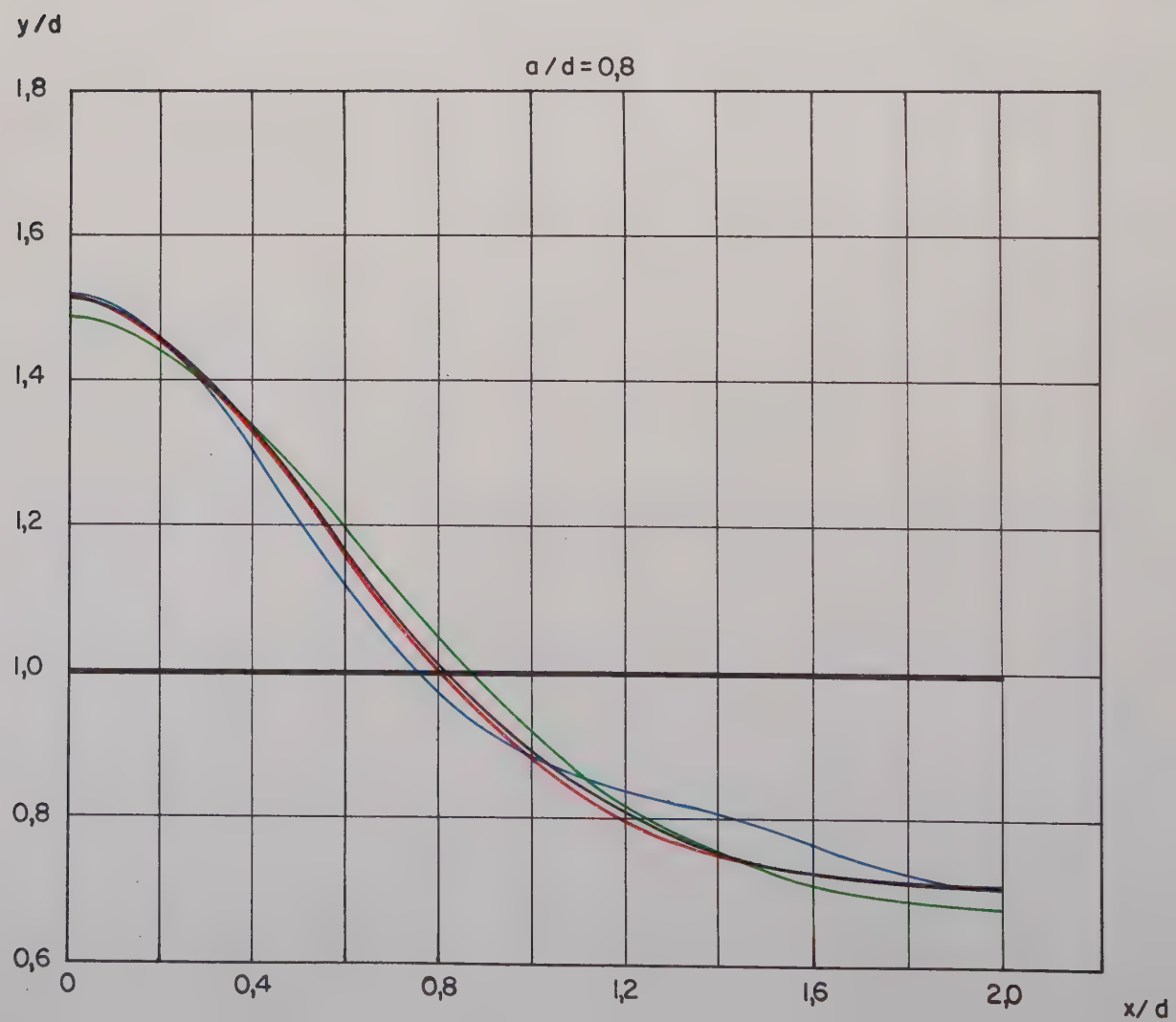


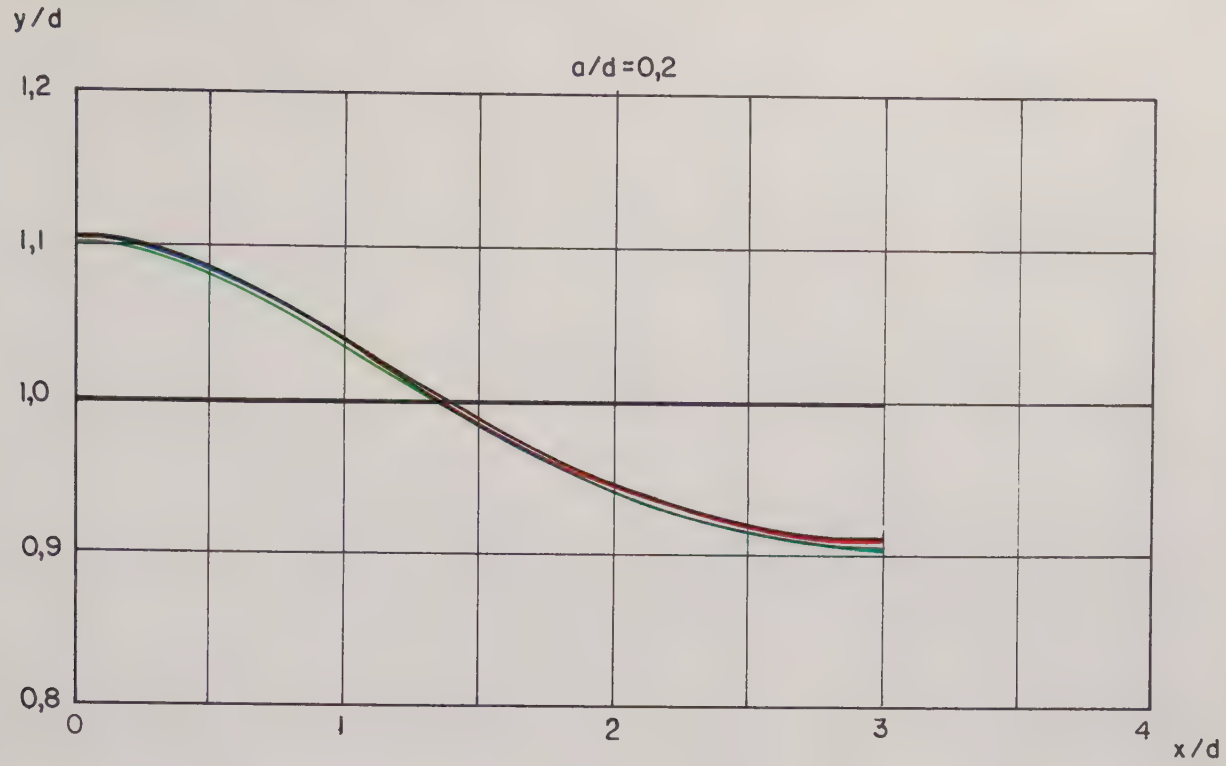
Planche 1

Longueur d'onde relative : $\frac{\lambda}{d} = 4$





COMPARAISON DES SURFACES LIBRES DE LA HOULE CNOIDALE ET DE LA HOULE DE STOKES



Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

Houle de Stokes de troisième approximation

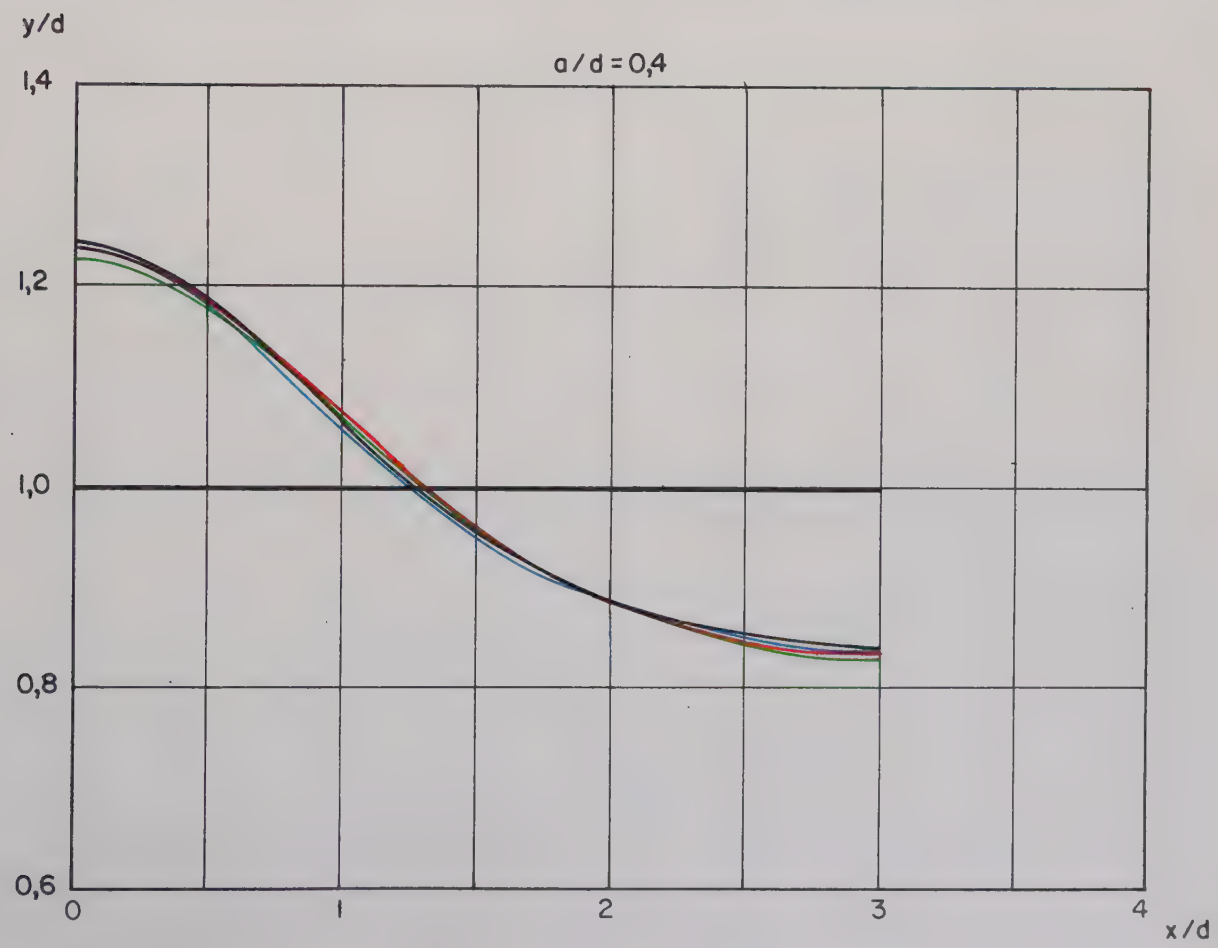
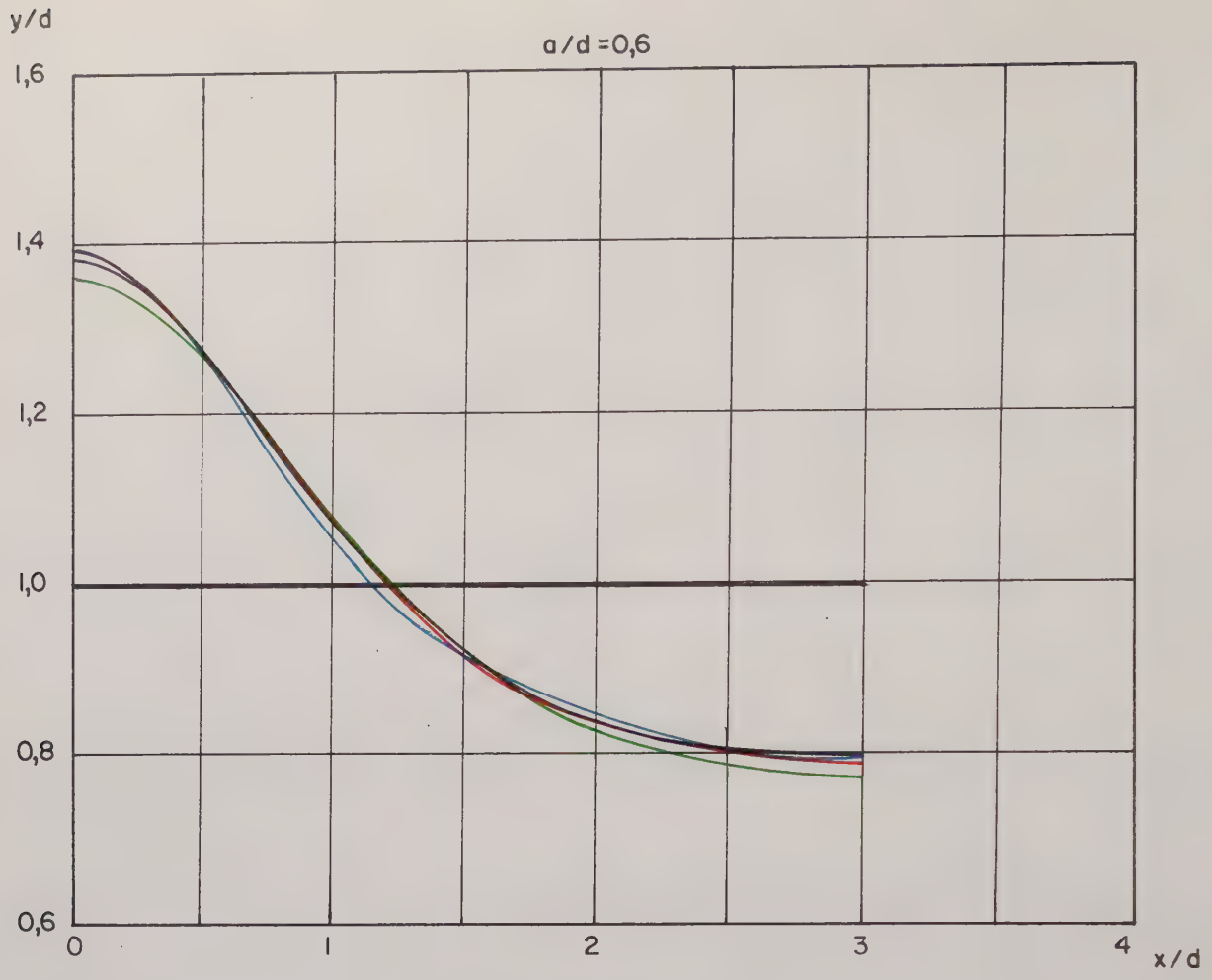
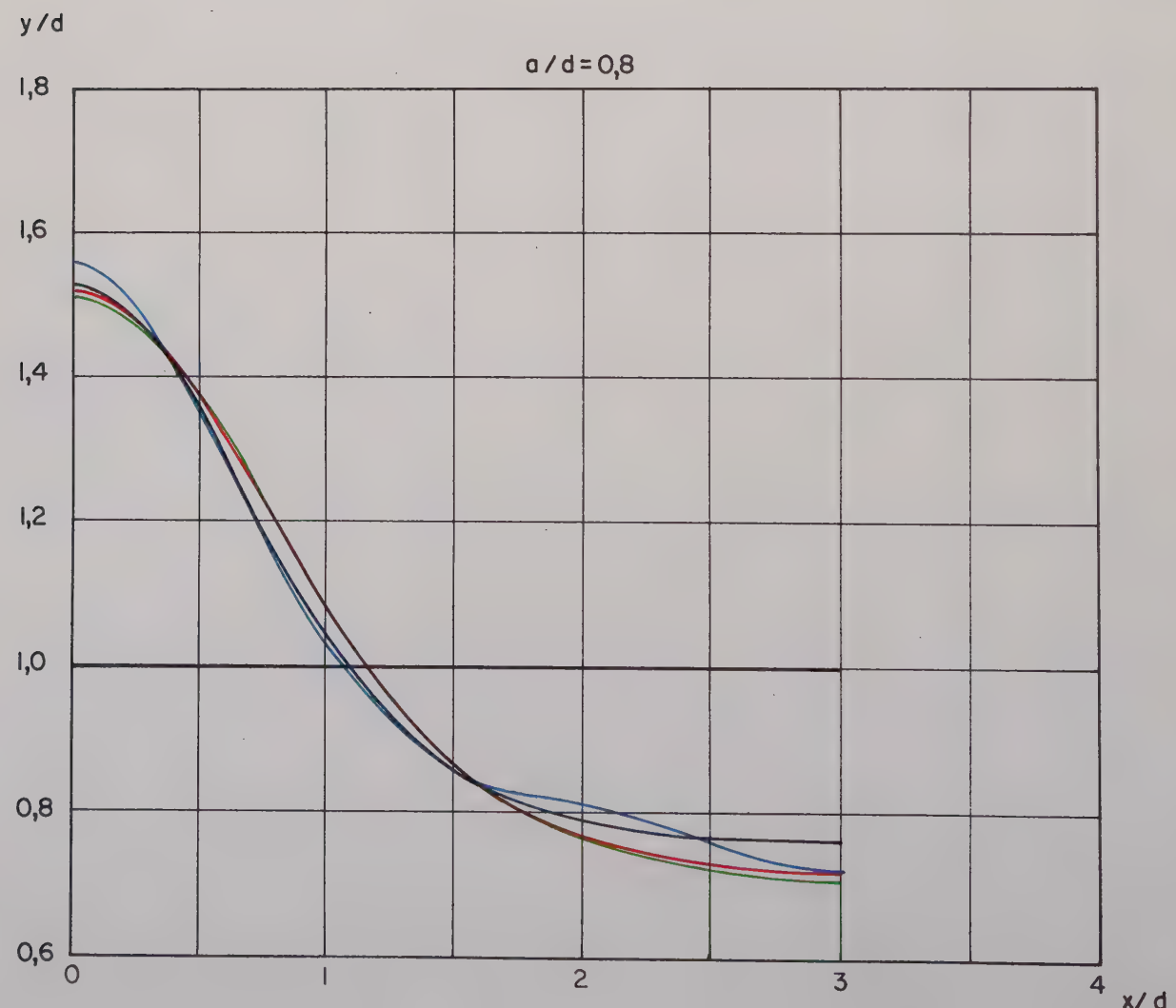


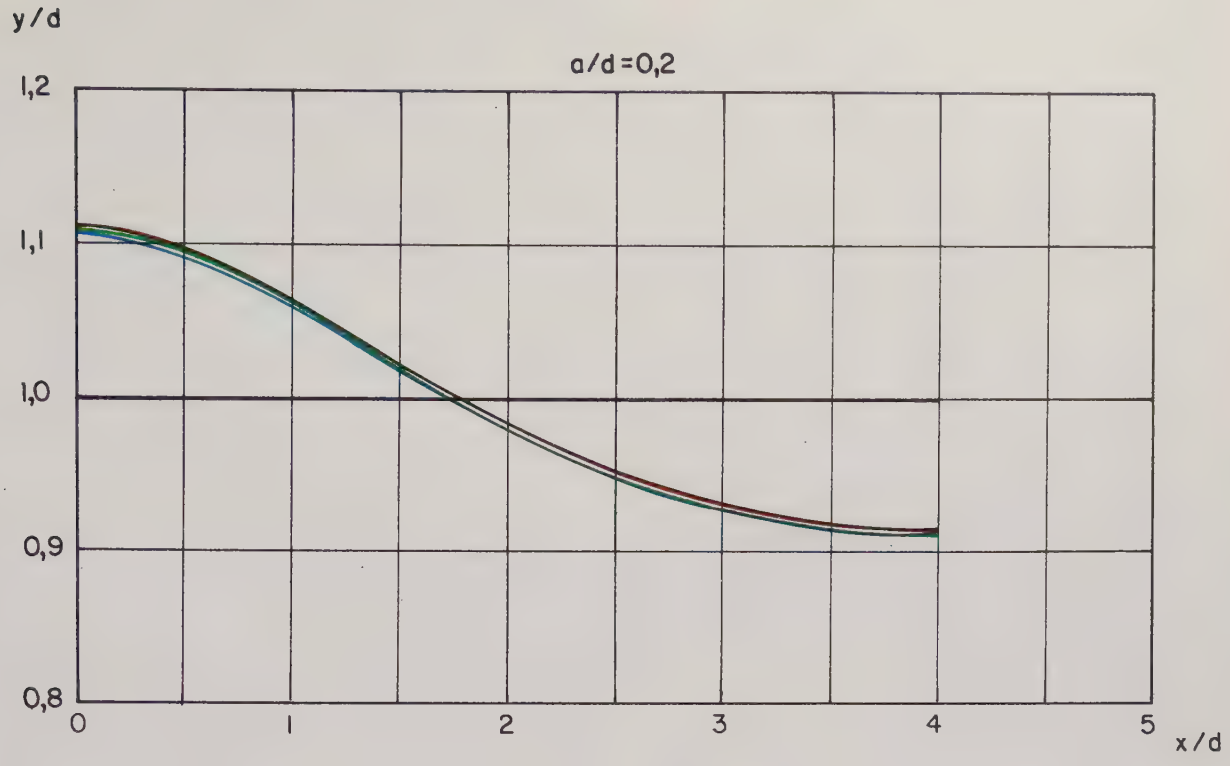
Planche 2

Longueur d'onde relative : $\frac{\lambda}{d} = 6$





COMPARAISON DES SURFACES LIBRES DE LA HOULE CNOIDALE ET DE LA HOULE DE STOKES



Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

Houle de Stokes de troisième approximation

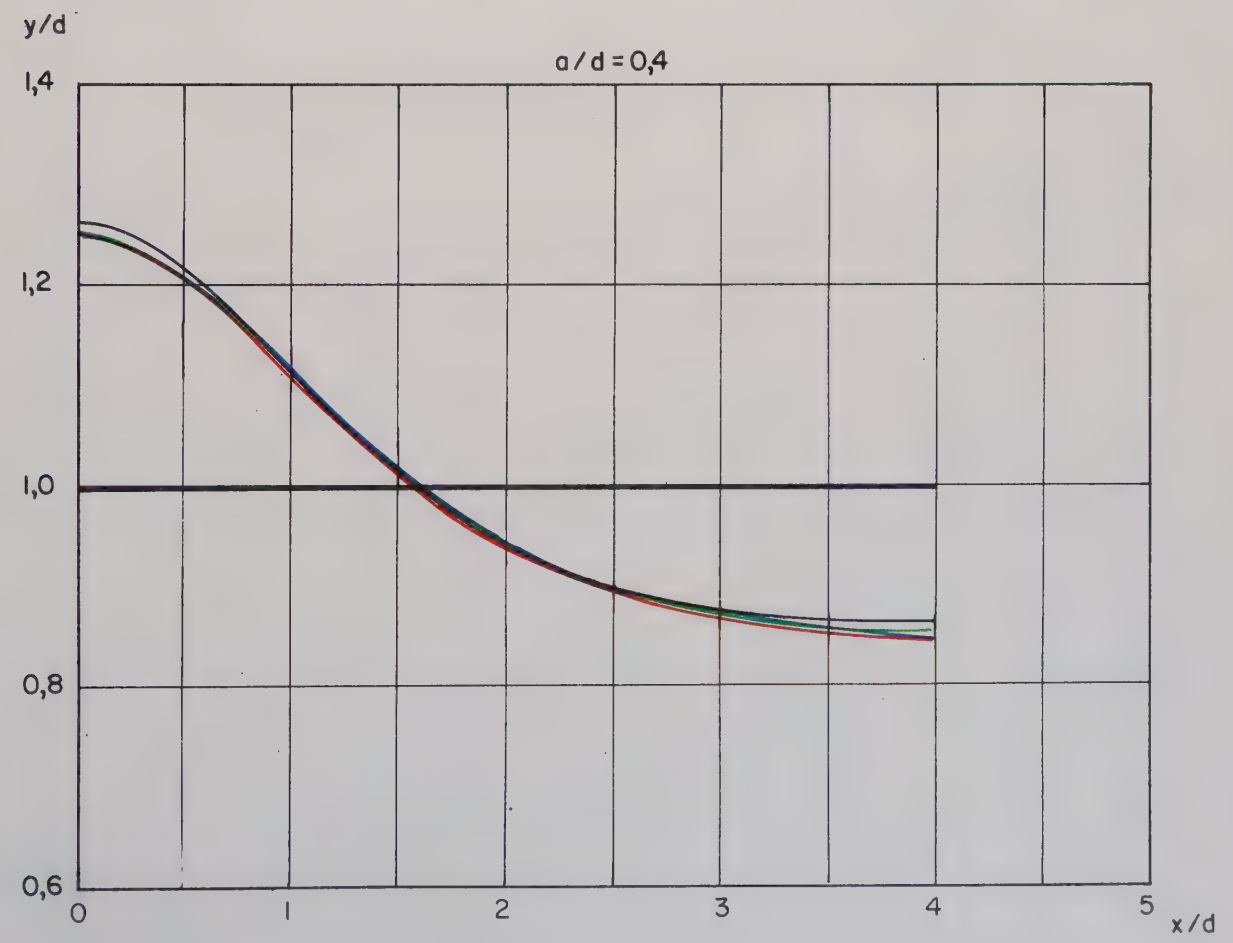
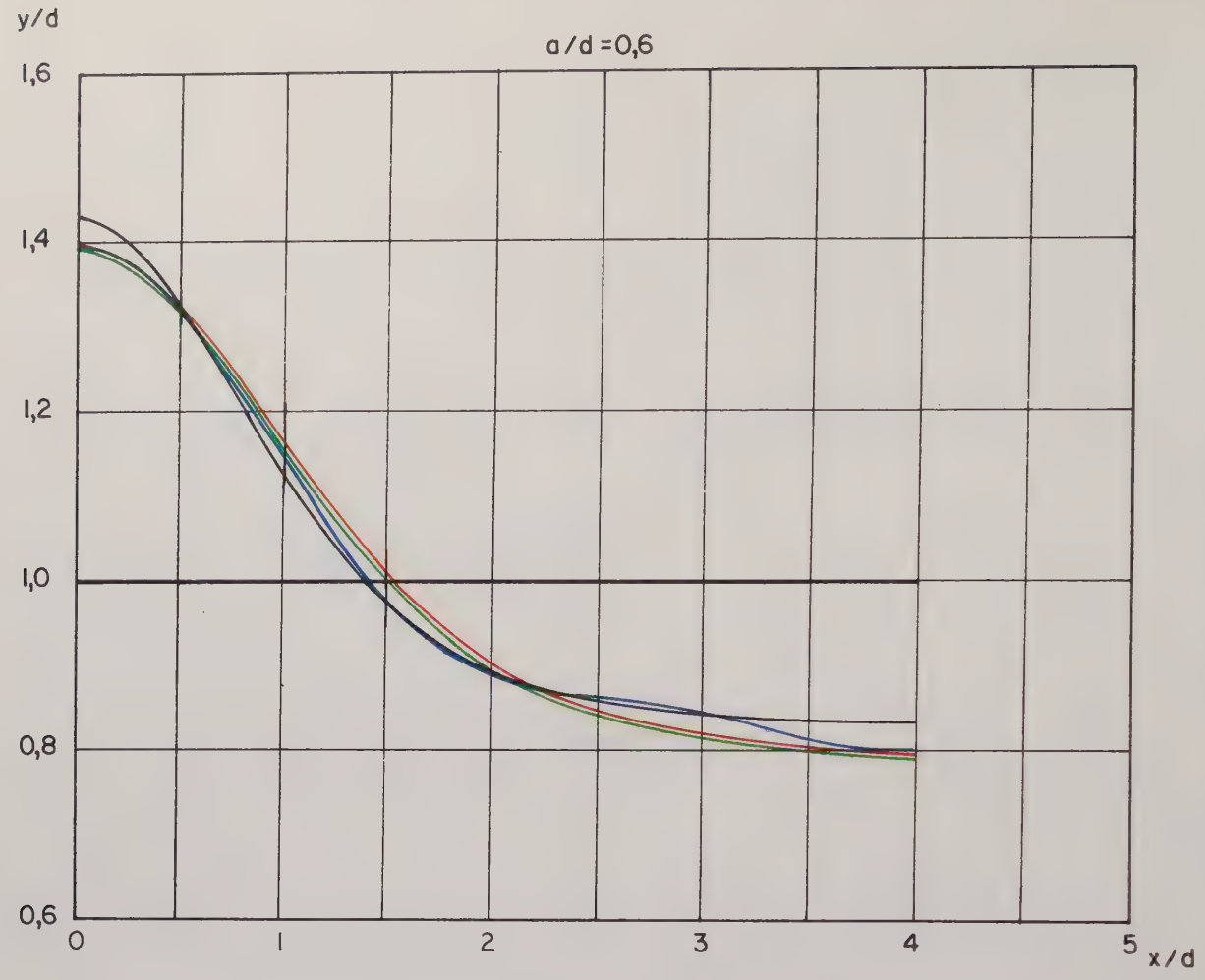
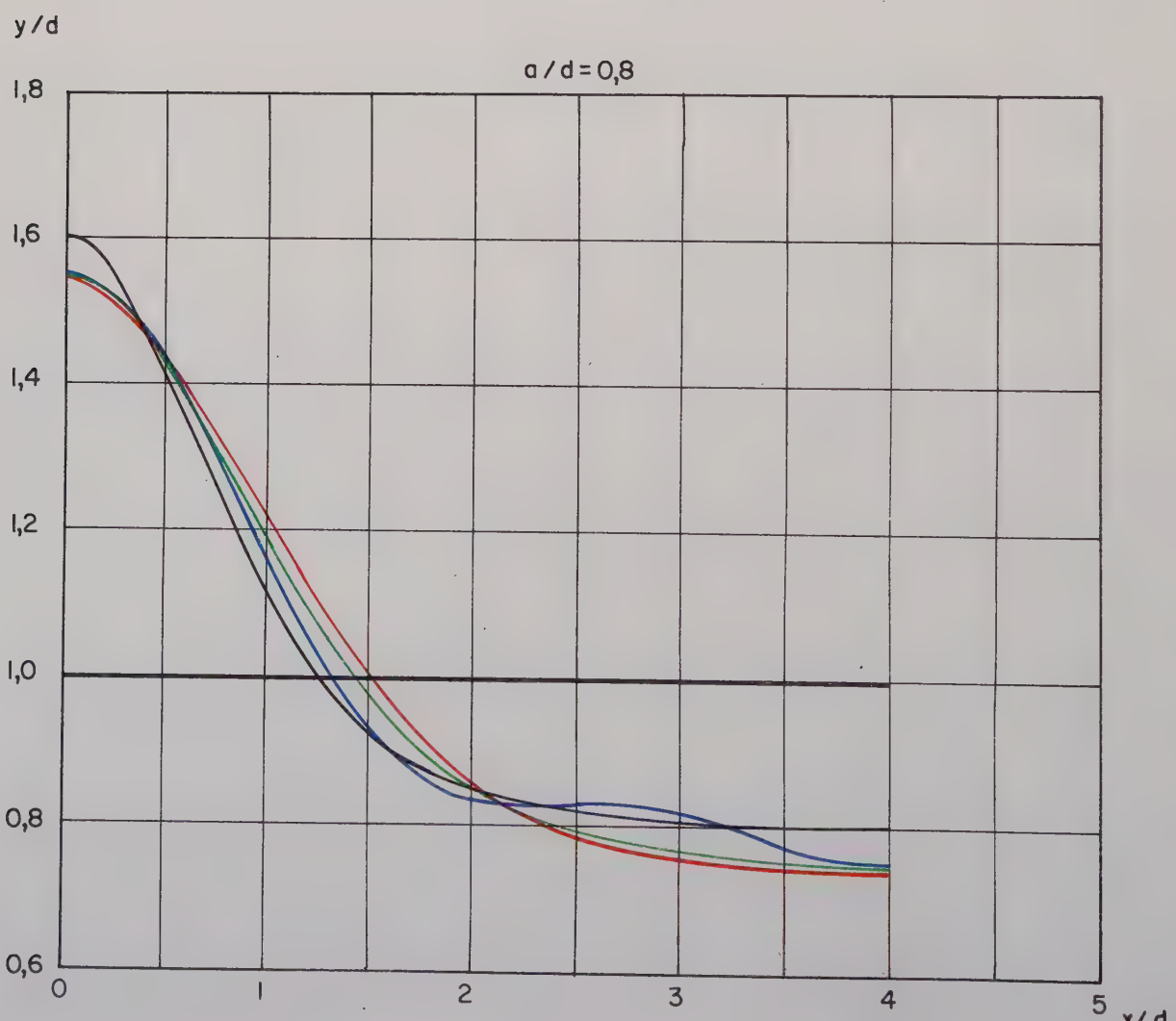


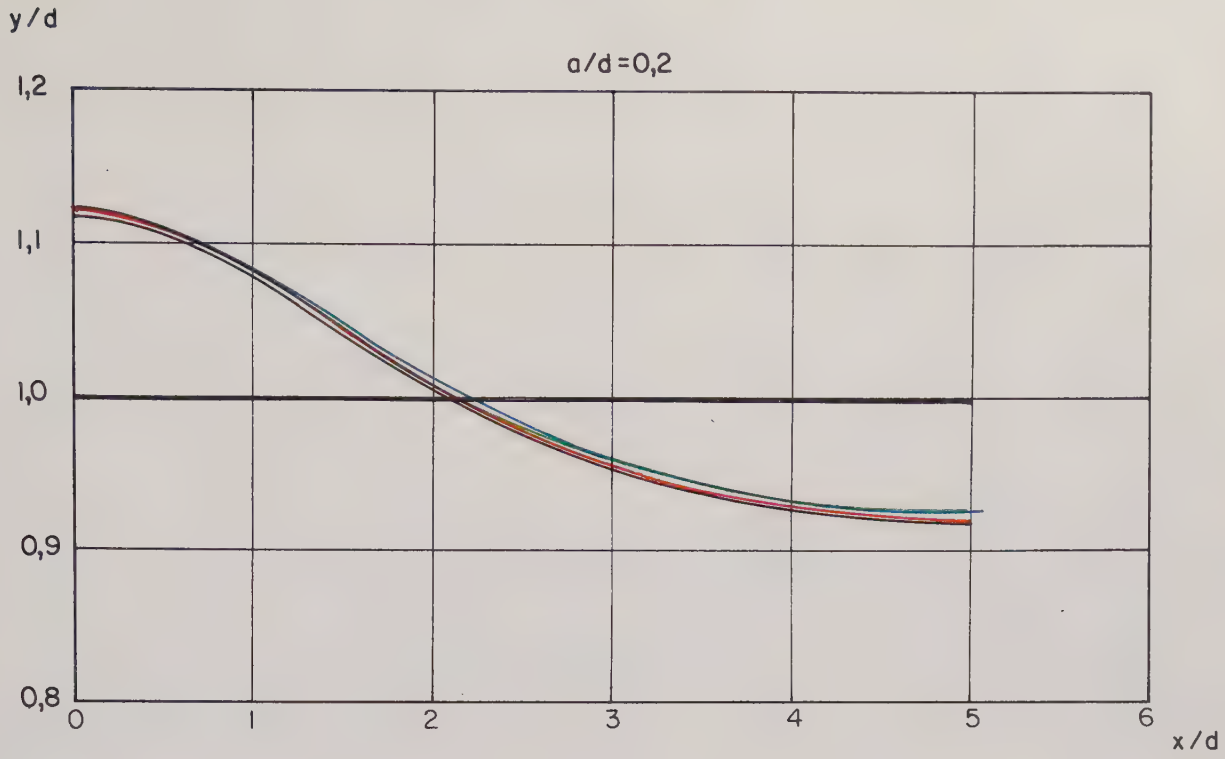
Planche 3

Longueur d'onde relative : $\frac{\lambda}{d} = 8$





COMPARAISON DES SURFACES LIBRES DE LA HOULE CNOIDALE ET DE LA HOULE DE STOKES



Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

Houle de Stokes de troisième approximation

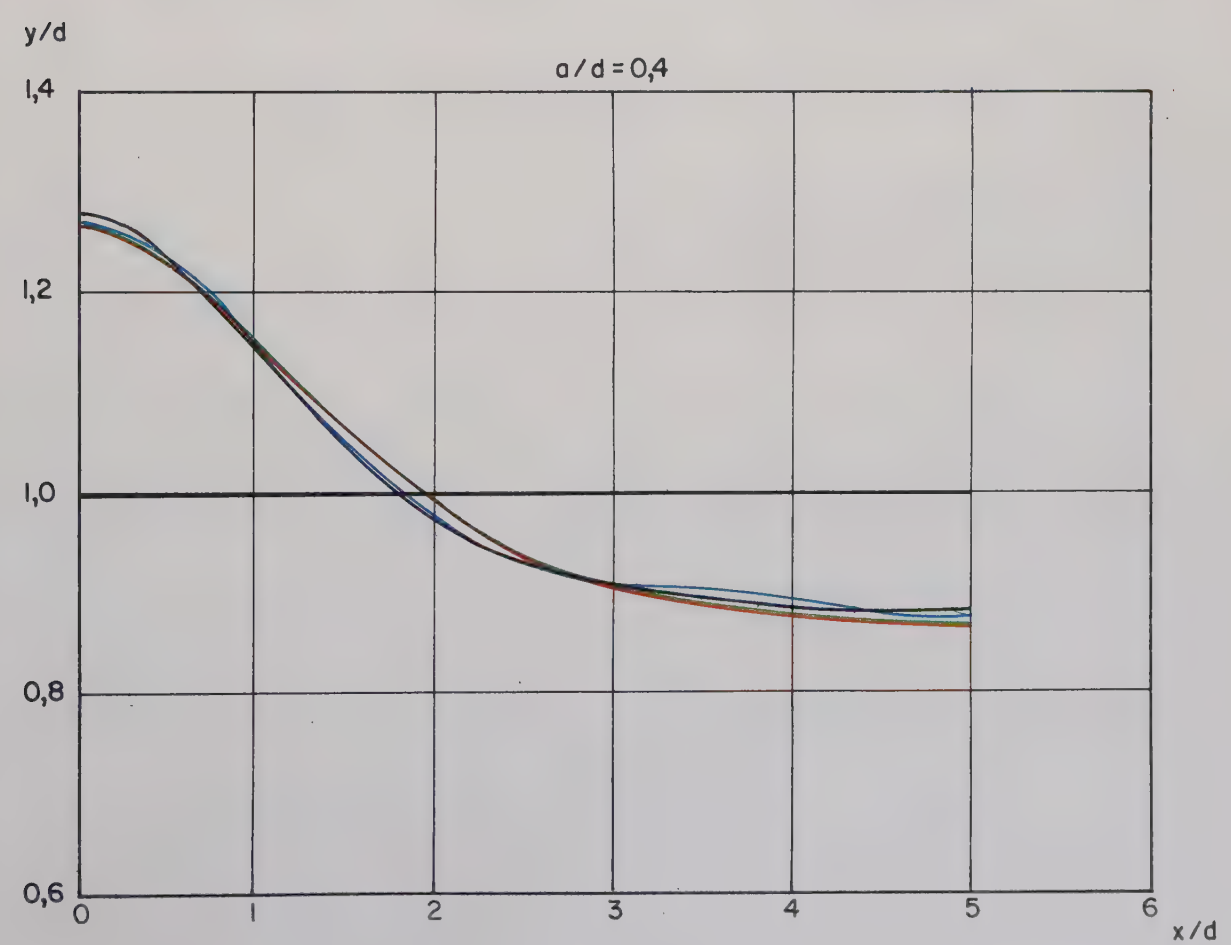
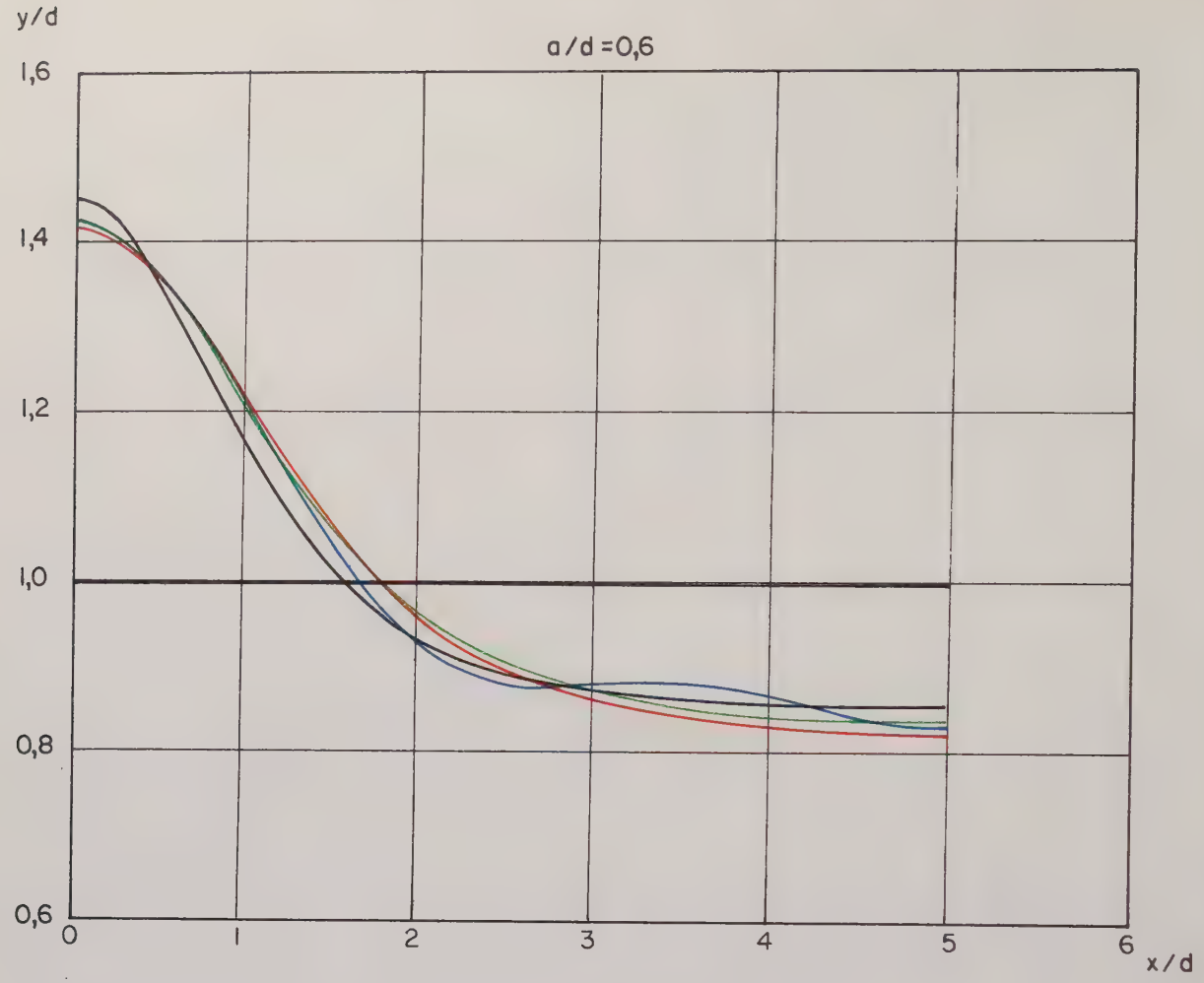
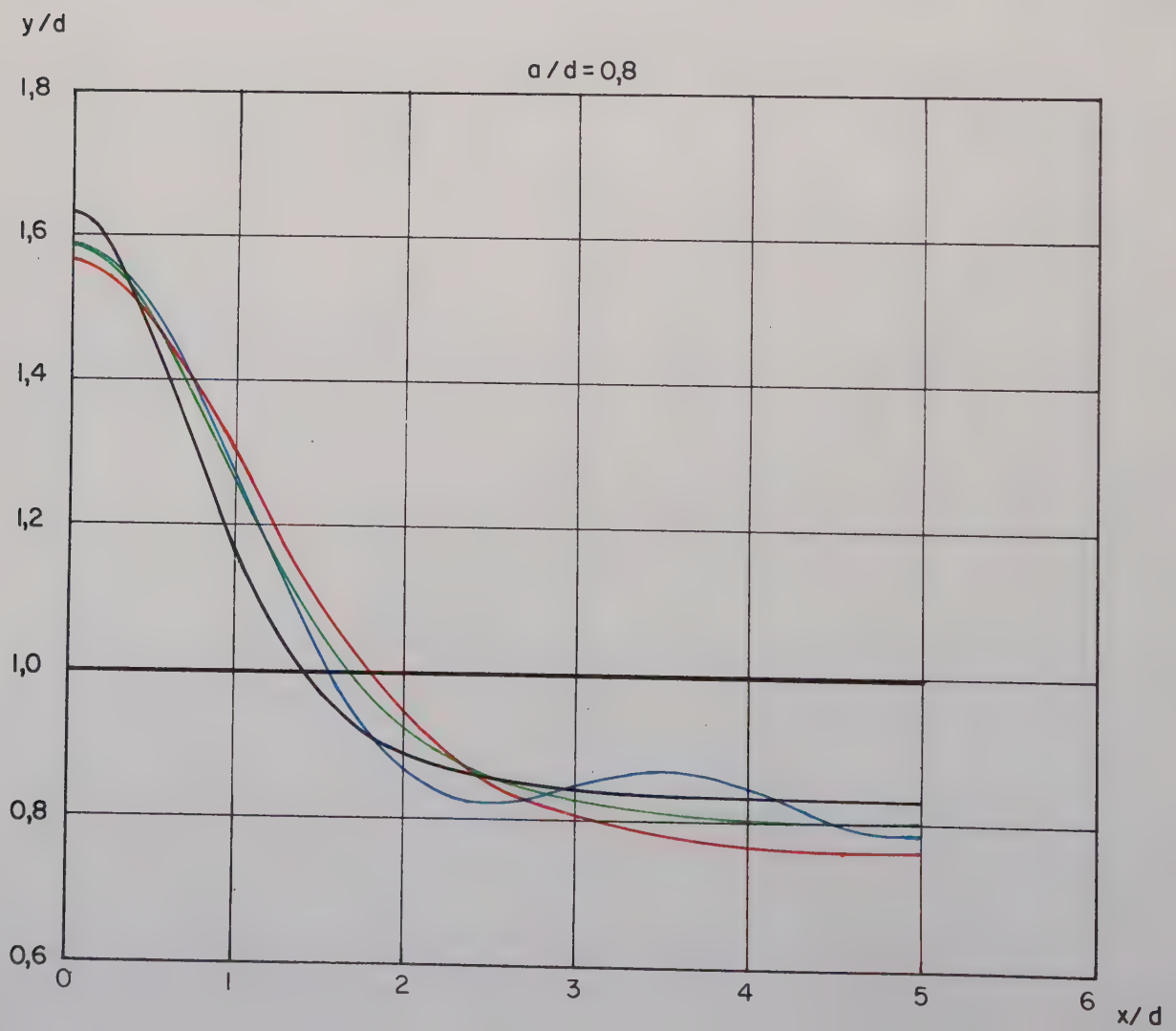


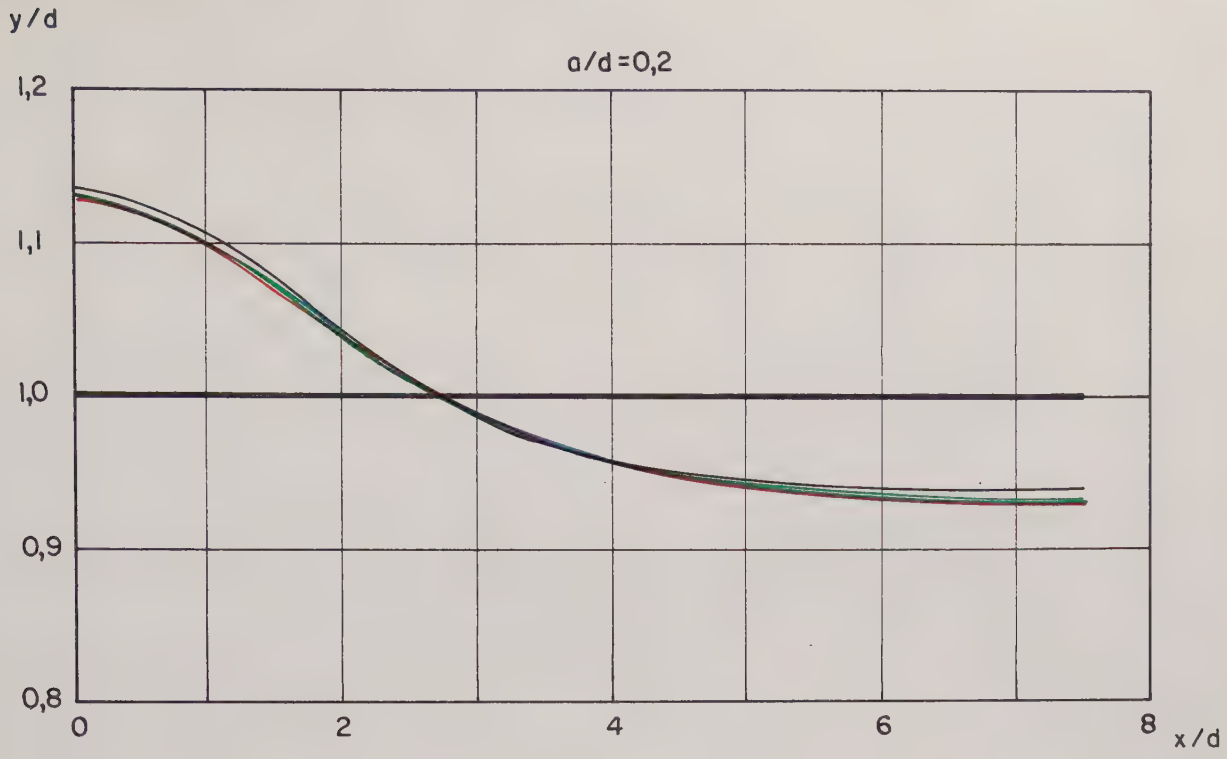
Planche 4

Longueur d'onde relative : $\frac{\lambda}{d} = 10$





COMPARAISON DES SURFACES LIBRES DE LA HOULE CNOIDALE ET DE LA HOULE DE STOKES



Houle cnoidale de première approximation
Houle cnoidale de deuxième approximation
Houle cnoidale (Solution de Serre)
Houle de Stokes de troisième approximation

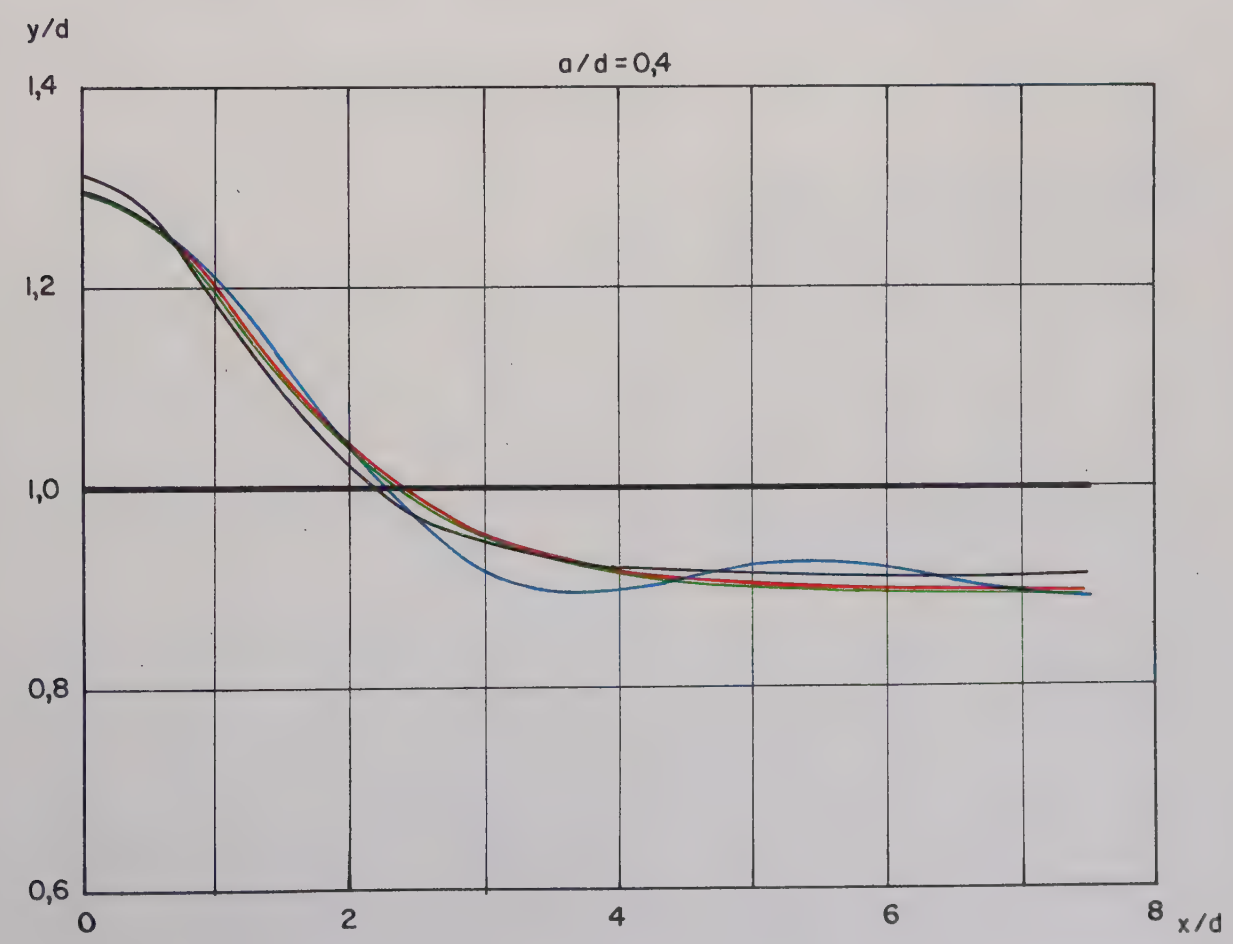
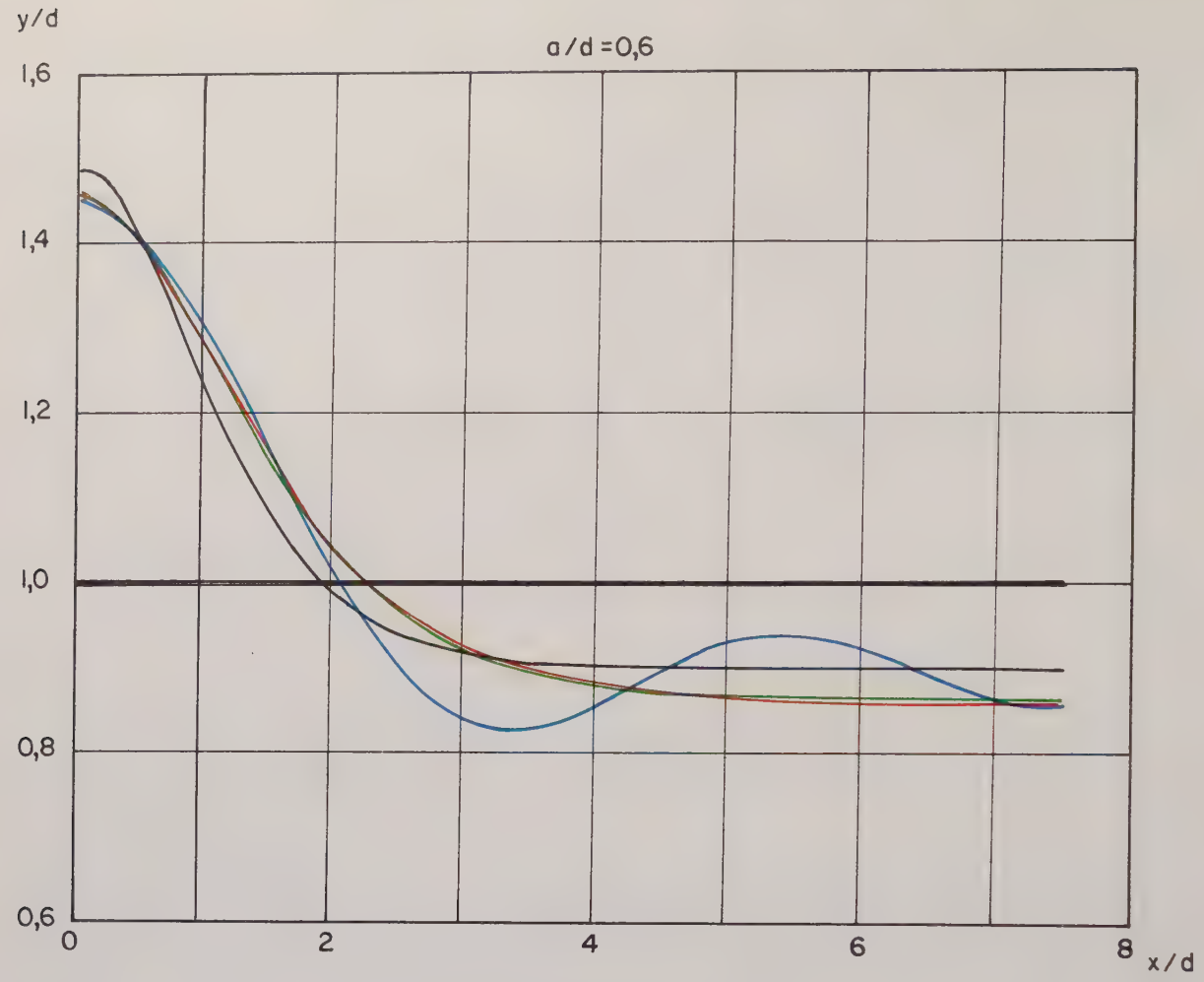
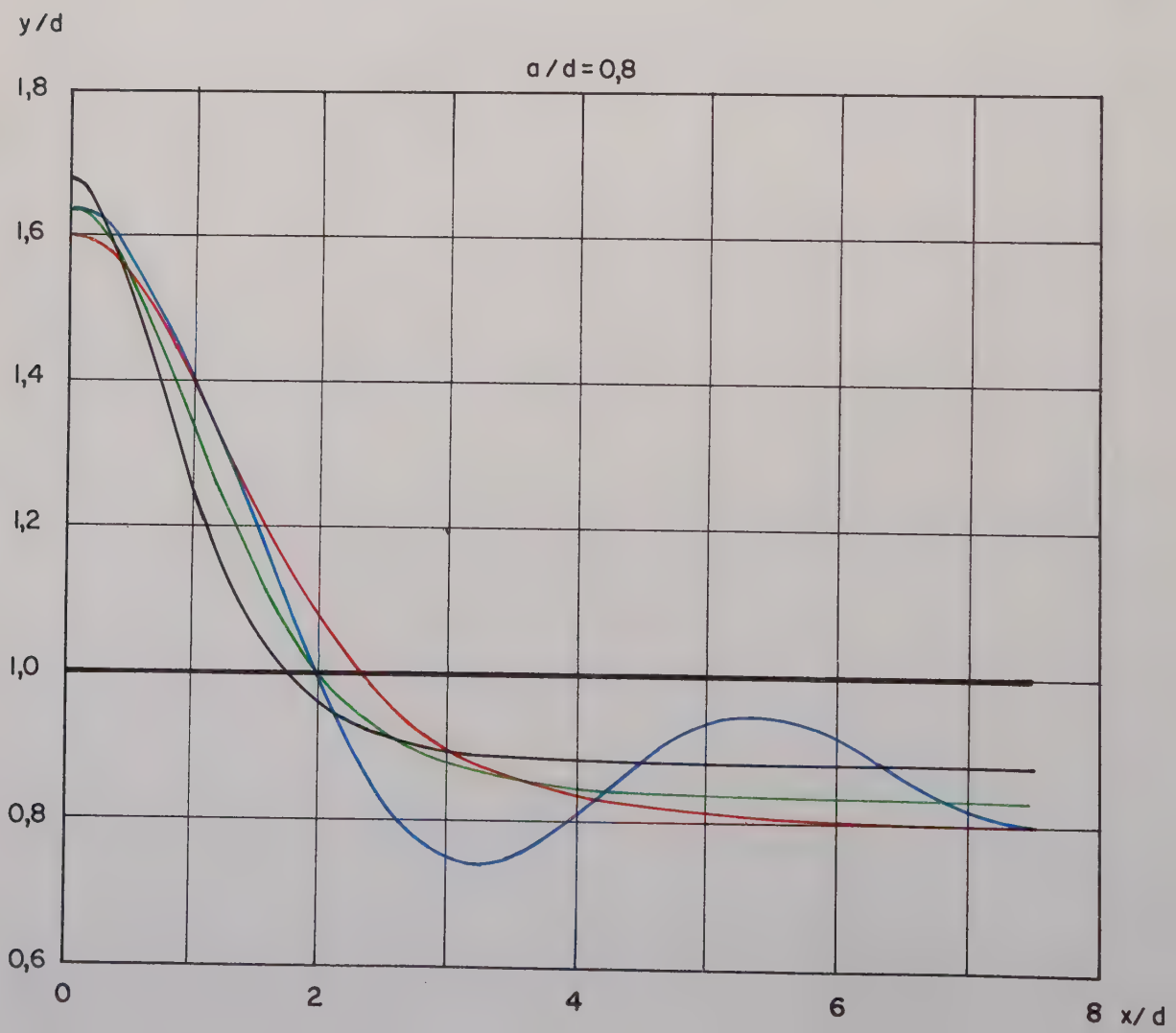


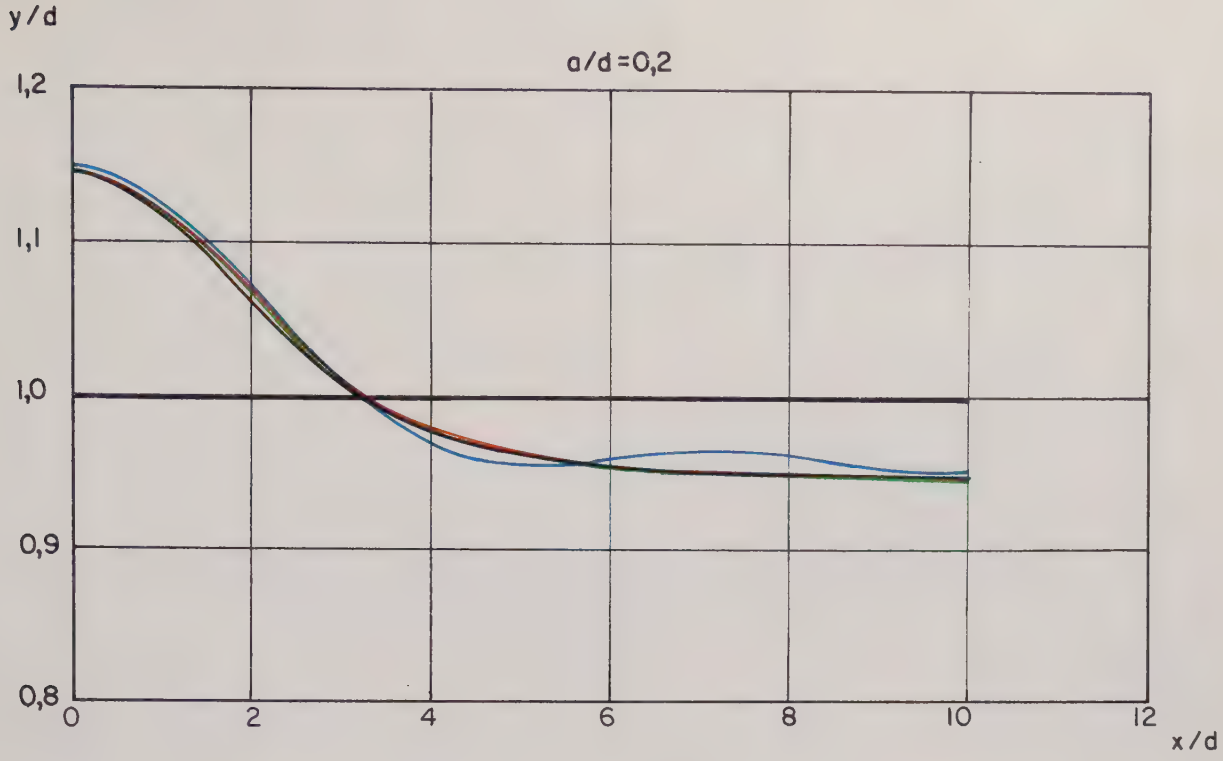
Planche 5

Longueur d'onde relative : $\frac{\lambda}{d} = 15$





COMPARAISON DES SURFACES LIBRES DE LA HOULE CNOIDALE ET DE LA HOULE DE STOKES



Houle cnoidale de première approximation
Houle cnoidale de deuxième approximation
Houle cnoidale (Solution de Serre)
Houle de Stokes de troisième approximation

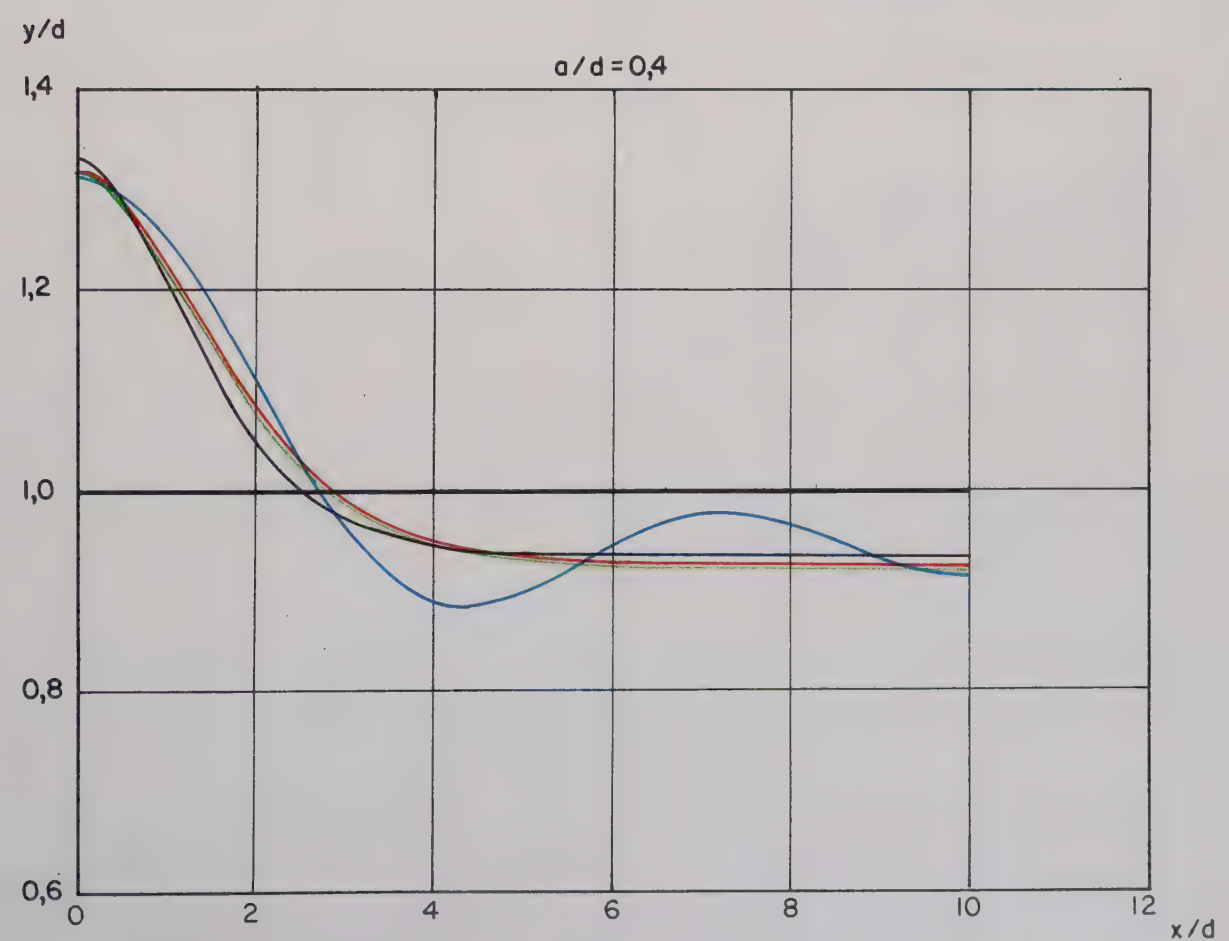
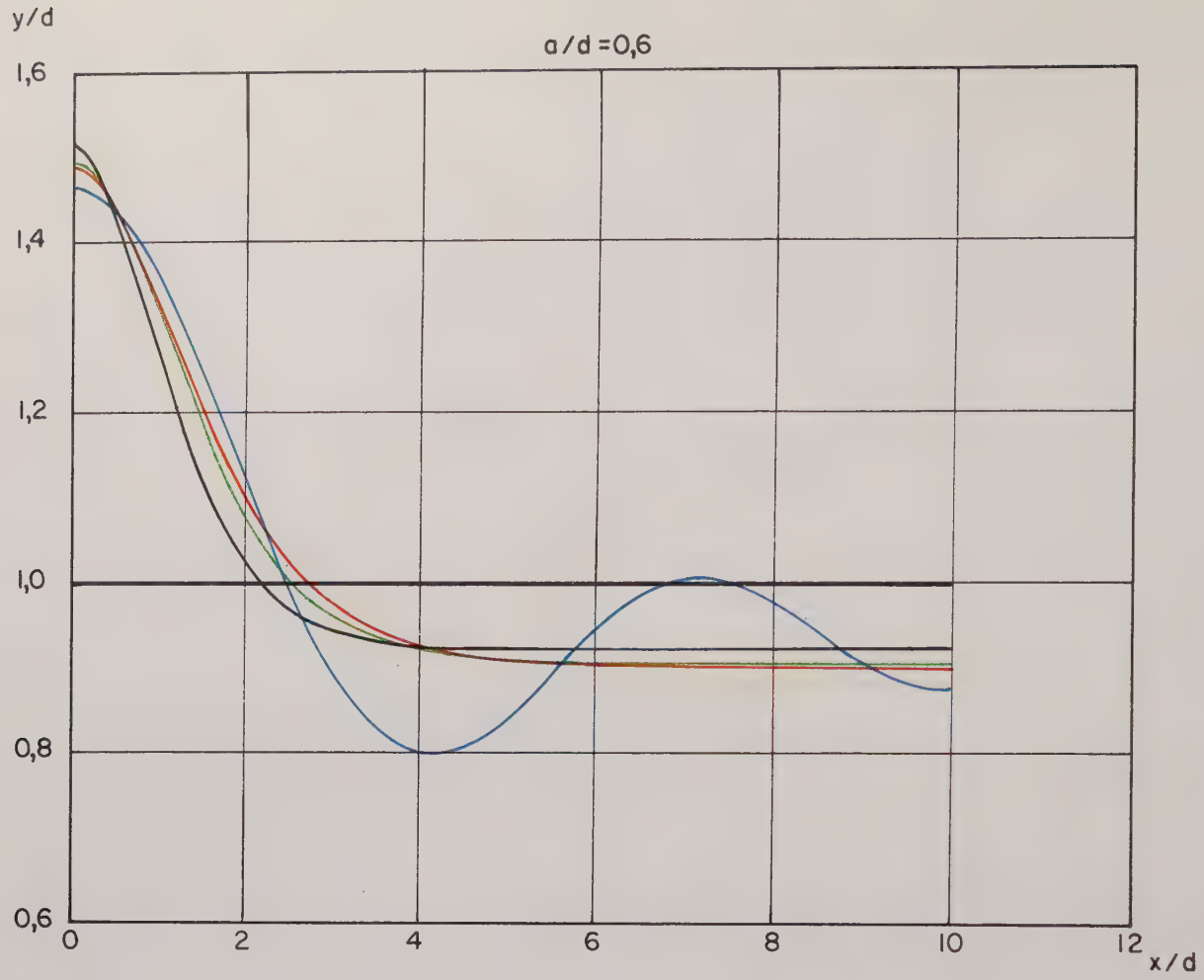
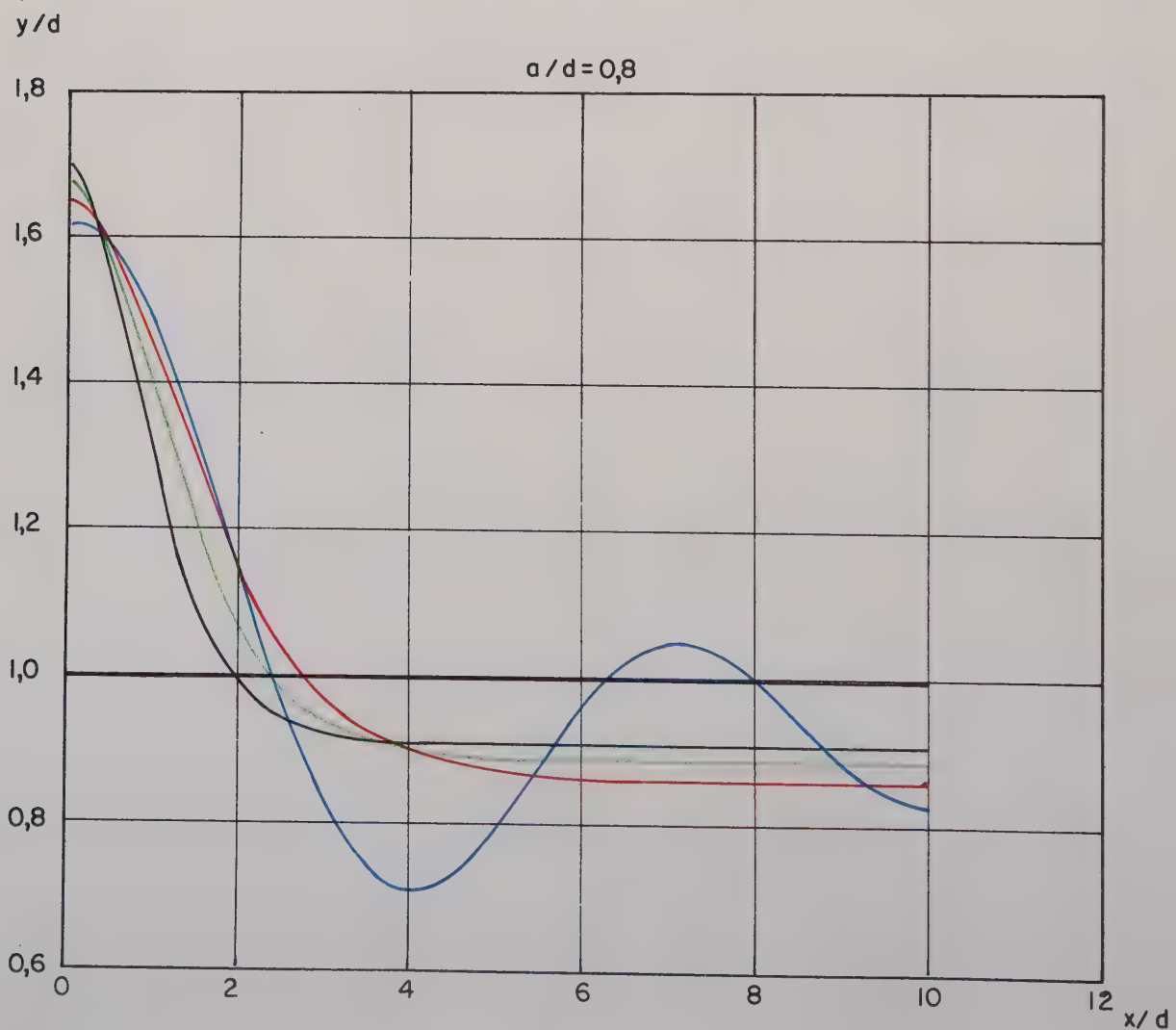


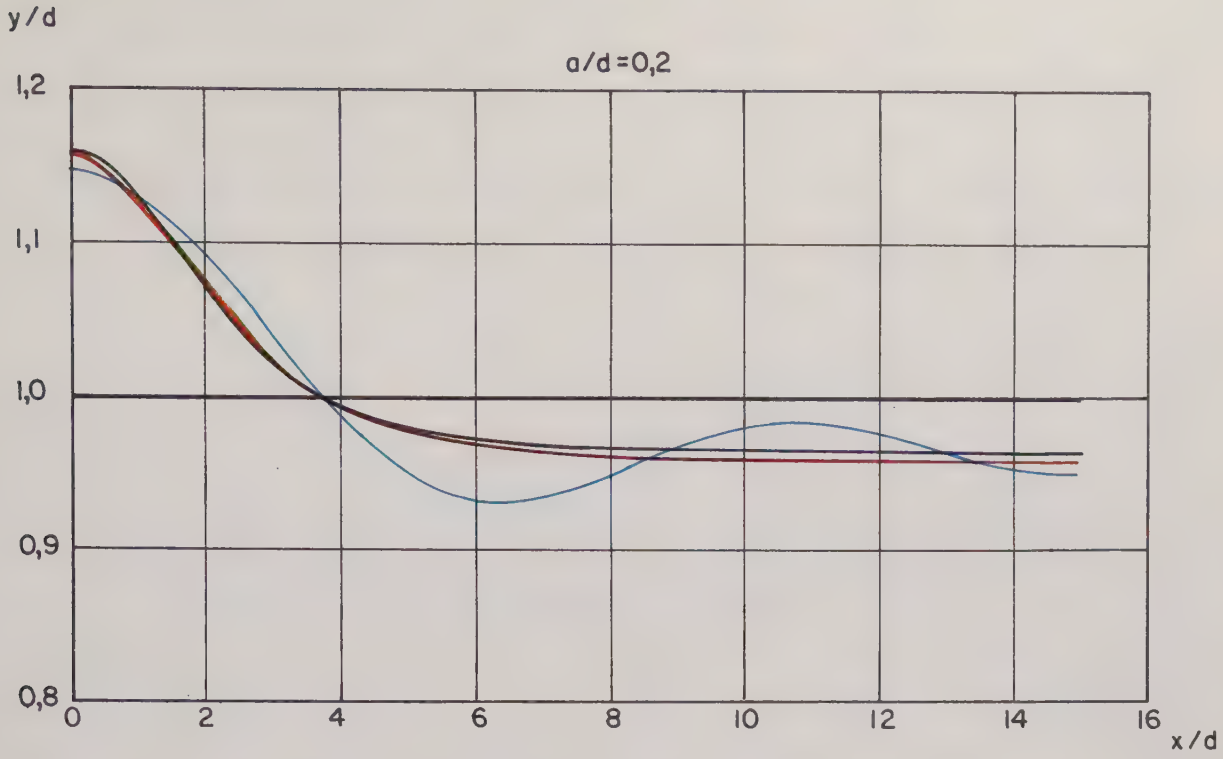
Planche 6

Longueur d'onde relative : $\frac{\lambda}{d} = 20$





COMPARAISON DES SURFACES LIBRES DE LA HOULE CNOIDALE ET DE LA HOULE DE STOKES



Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

Houle de Stokes de troisième approximation

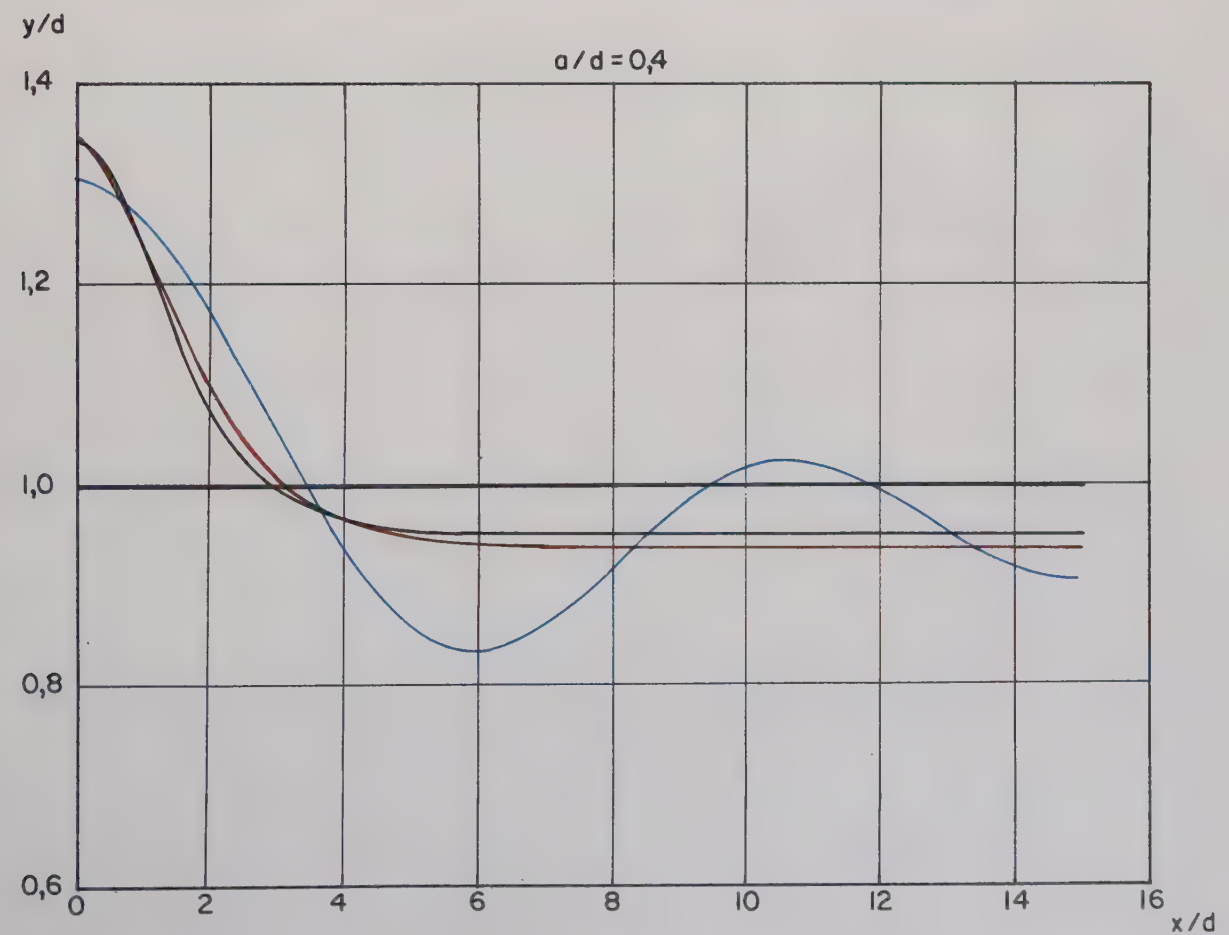
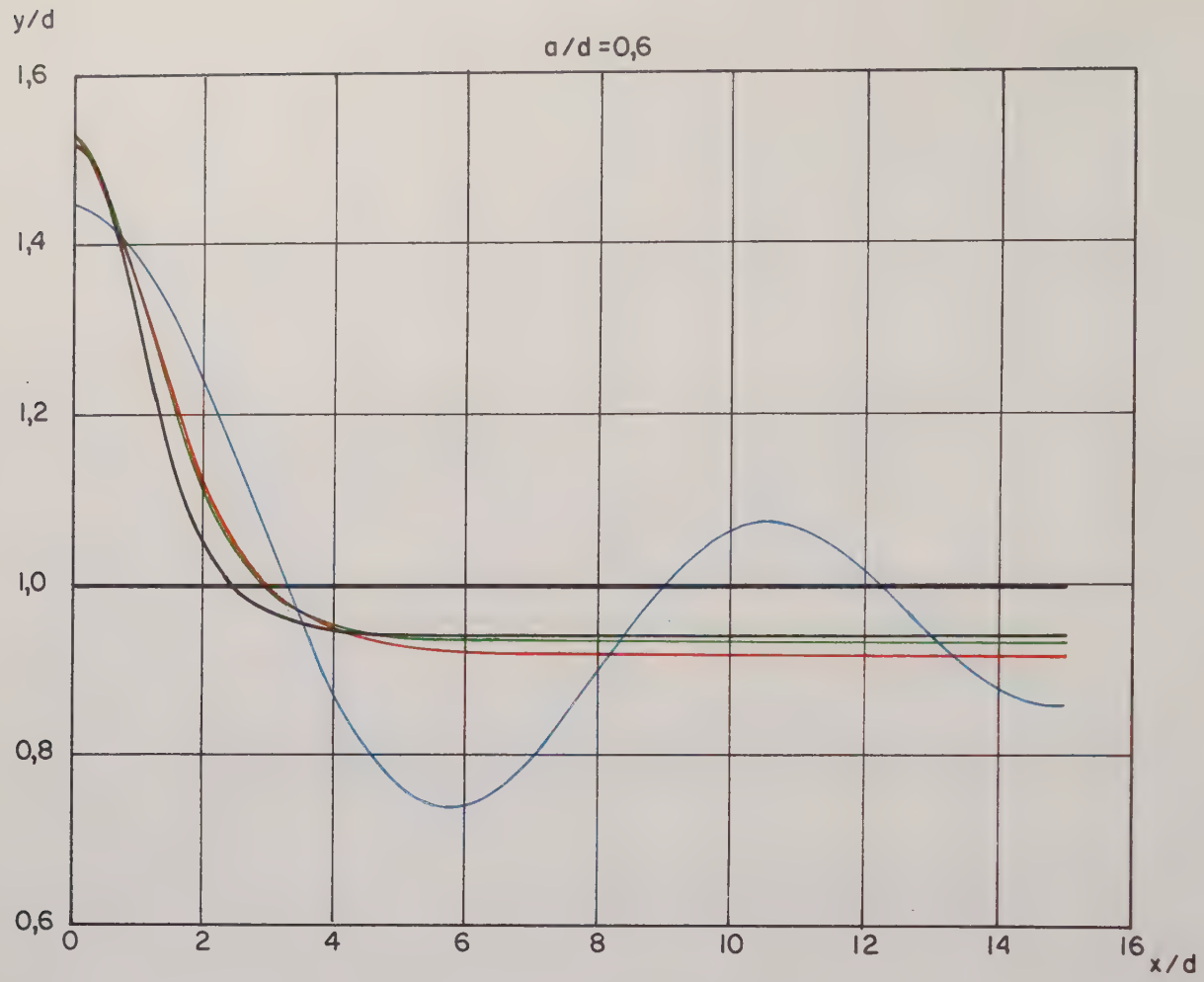
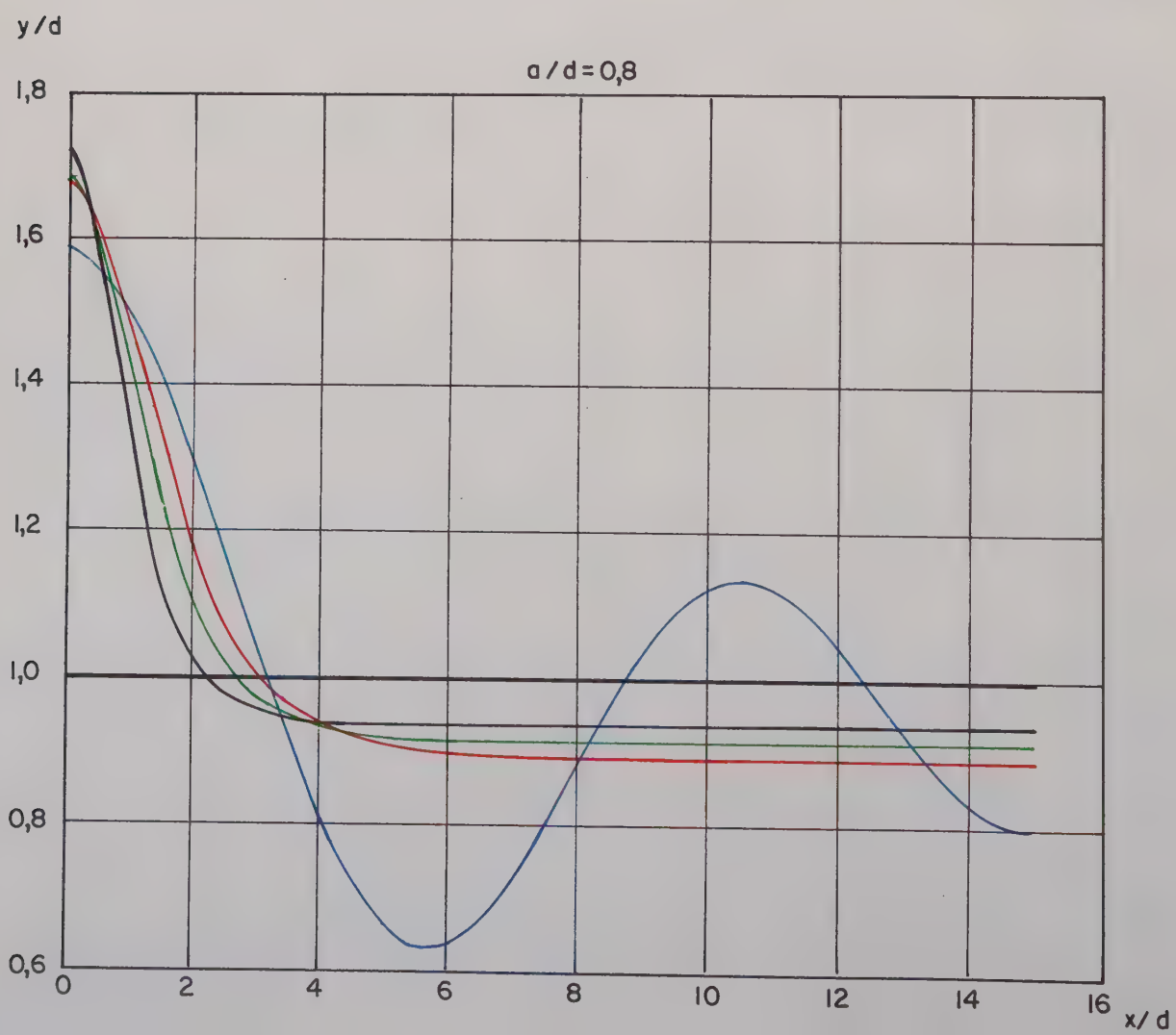


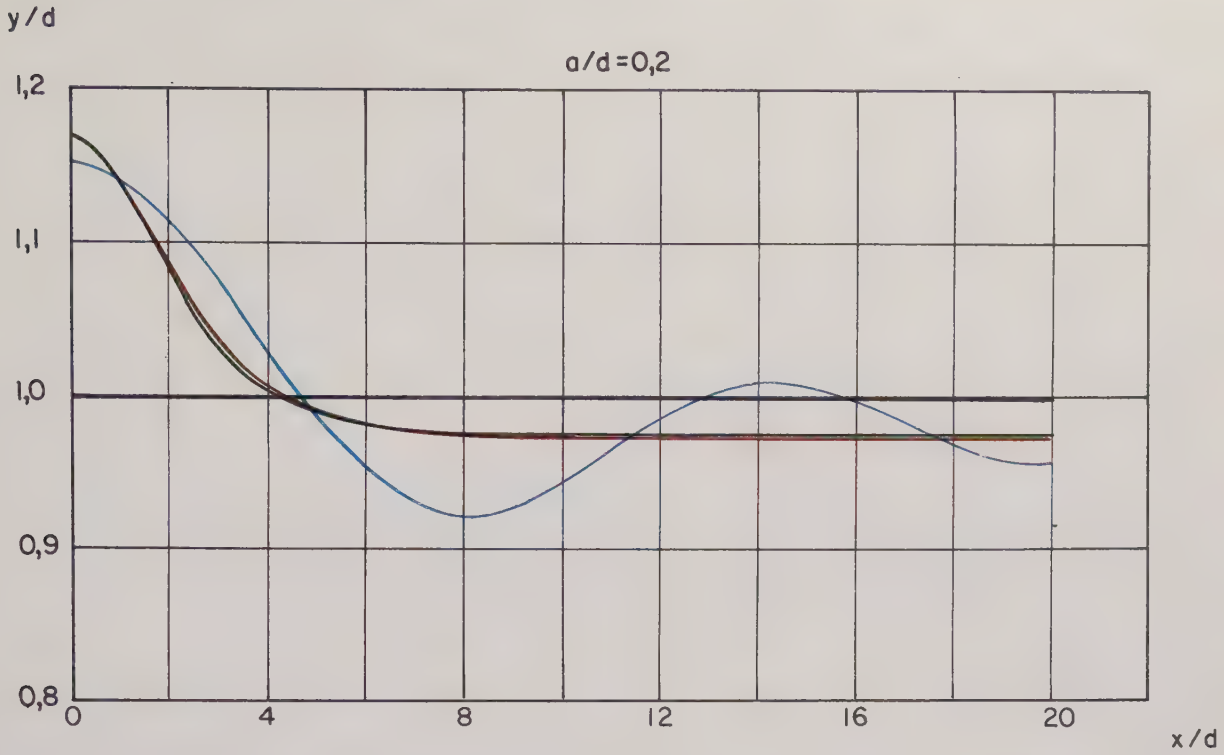
Planche 7

Longueur d'onde relative : $\frac{\lambda}{d} = 30$





COMPARAISON DES SURFACES LIBRES DE LA HOULE CNOIDALE ET DE LA HOULE DE STOKES



Houle cnoidale de première approximation
Houle cnoidale de deuxième approximation
Houle cnoidale (Solution de Serre)
Houle de Stokes de troisième approximation

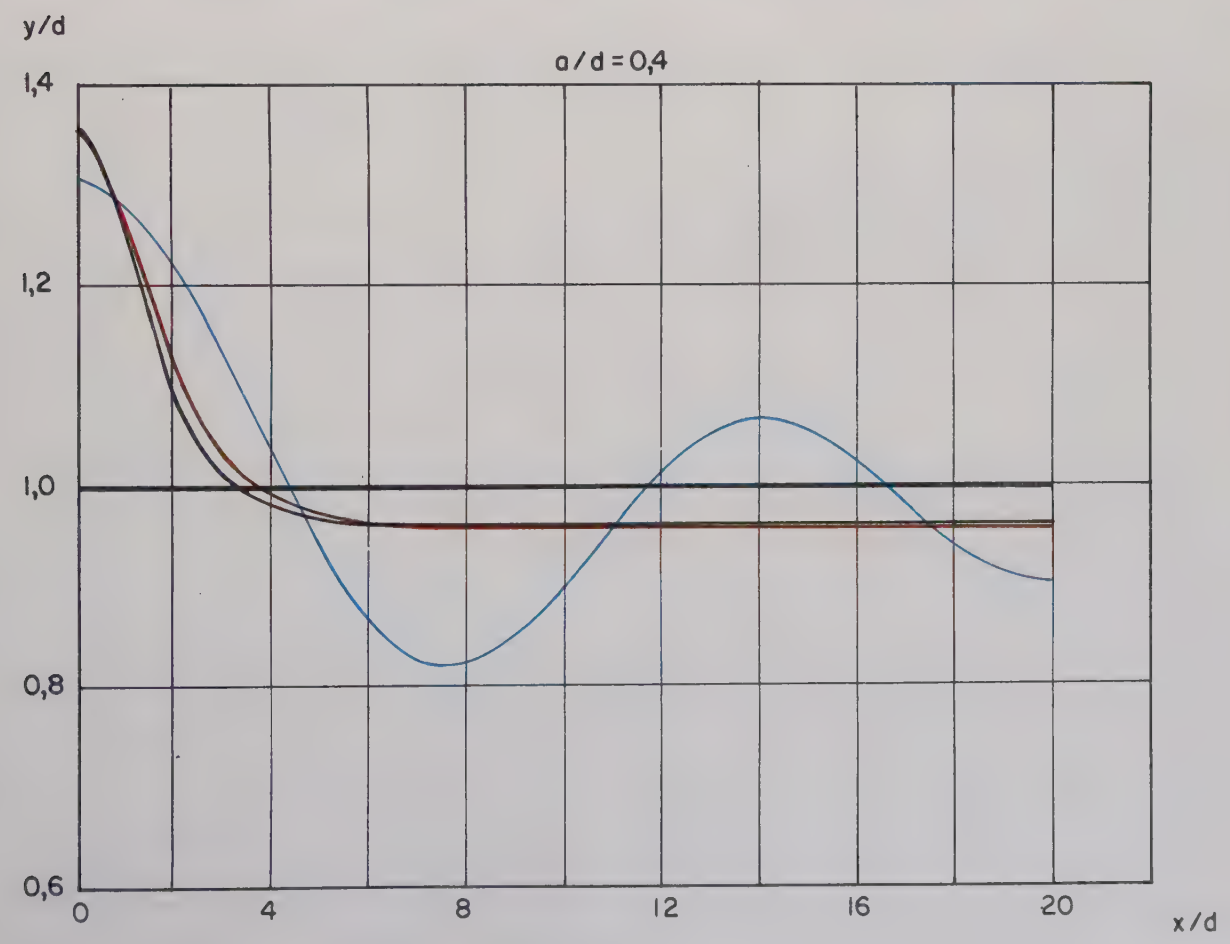
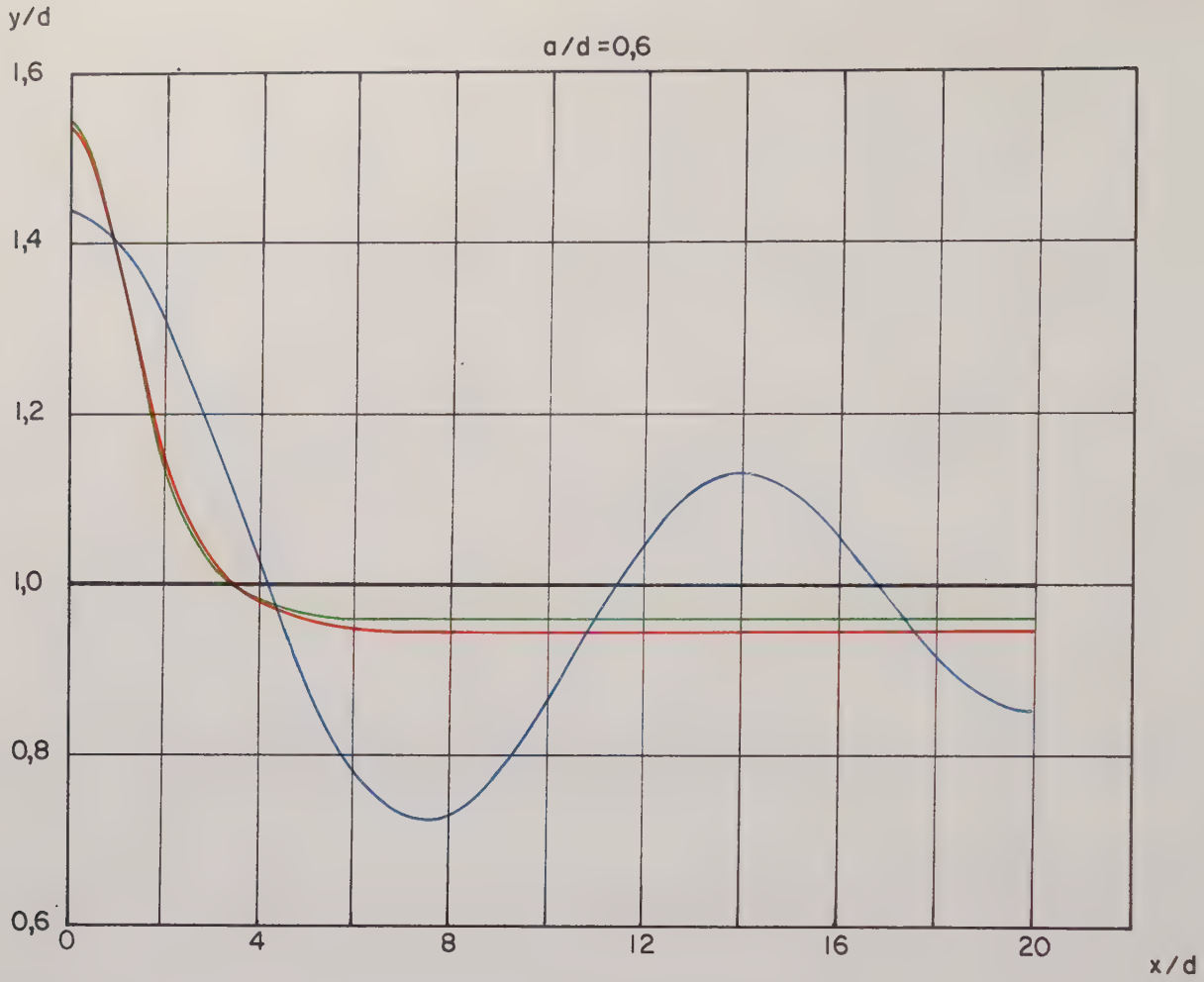
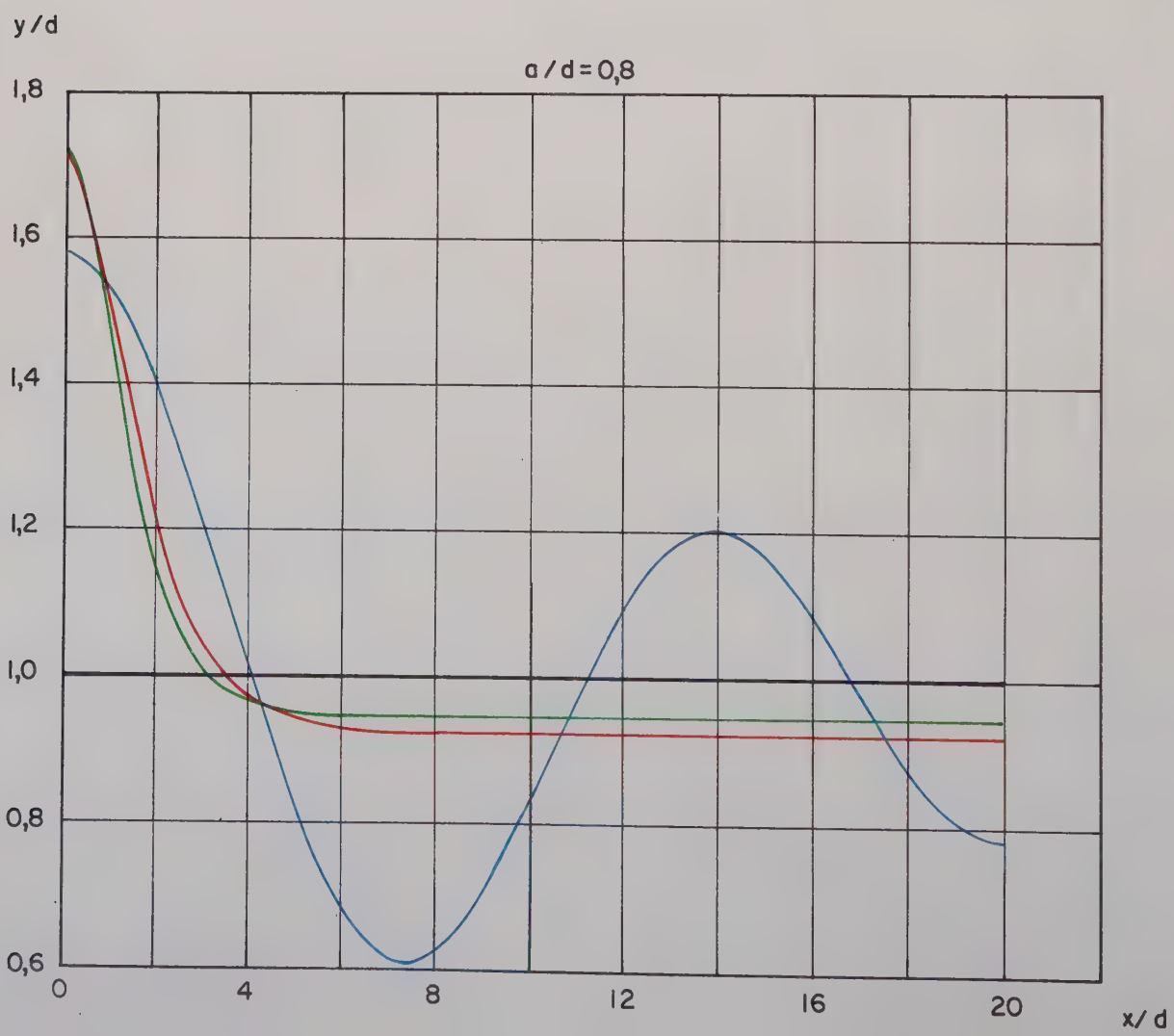


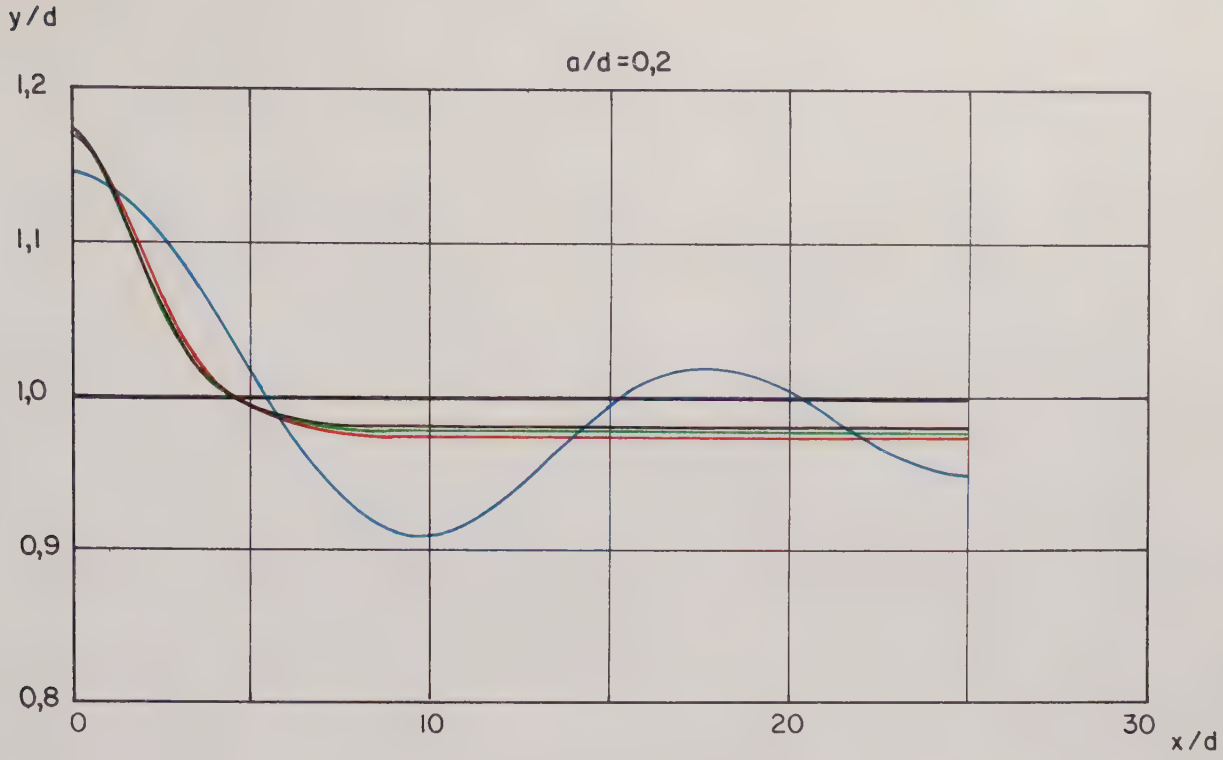
Planche 8

Longueur d'onde relative : $\frac{\lambda}{d} = 40$





COMPARAISON DES SURFACES LIBRES DE LA HOULE CNOIDALE ET DE LA HOULE DE STOKES



Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Sôlution de Serre)

Houle de Stokes de troisième approximation

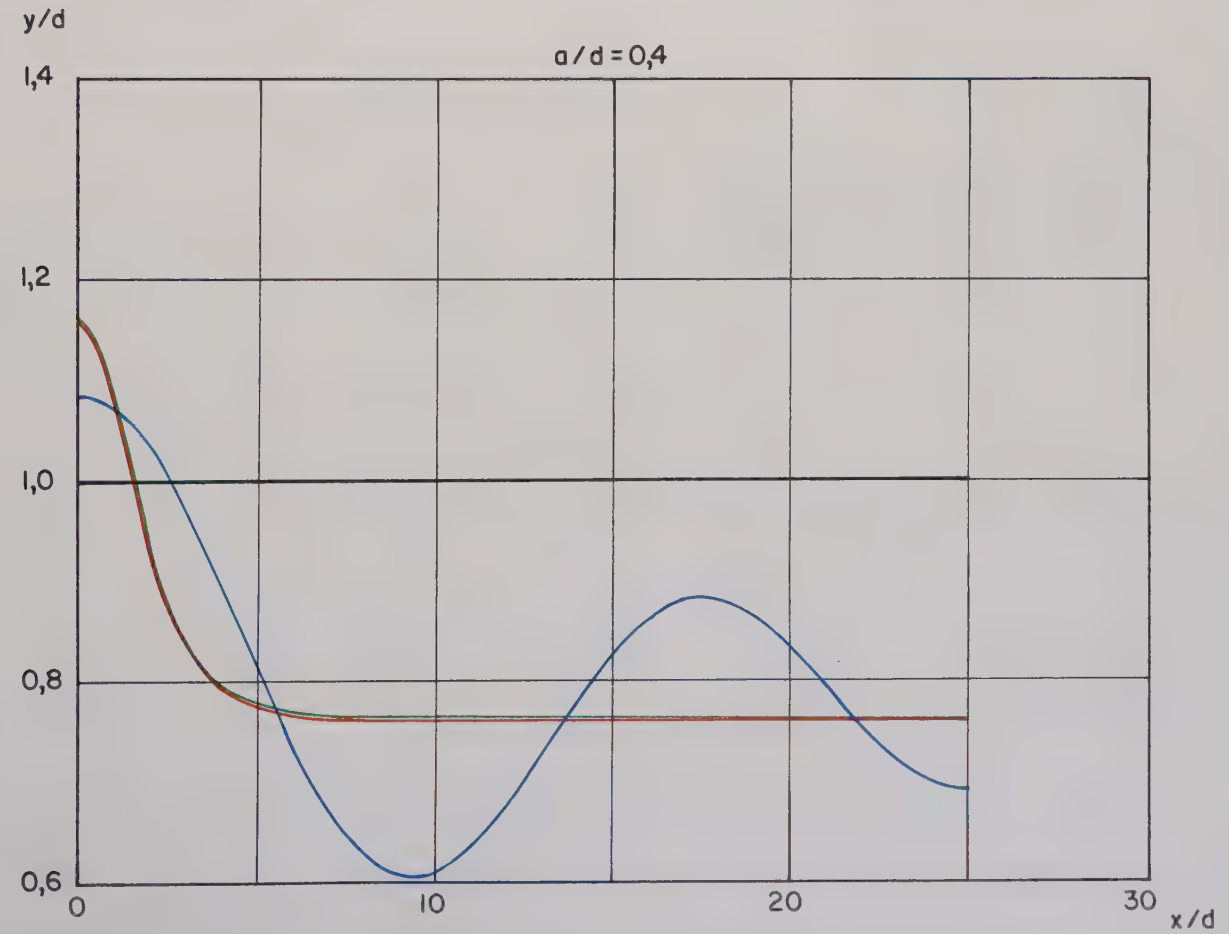
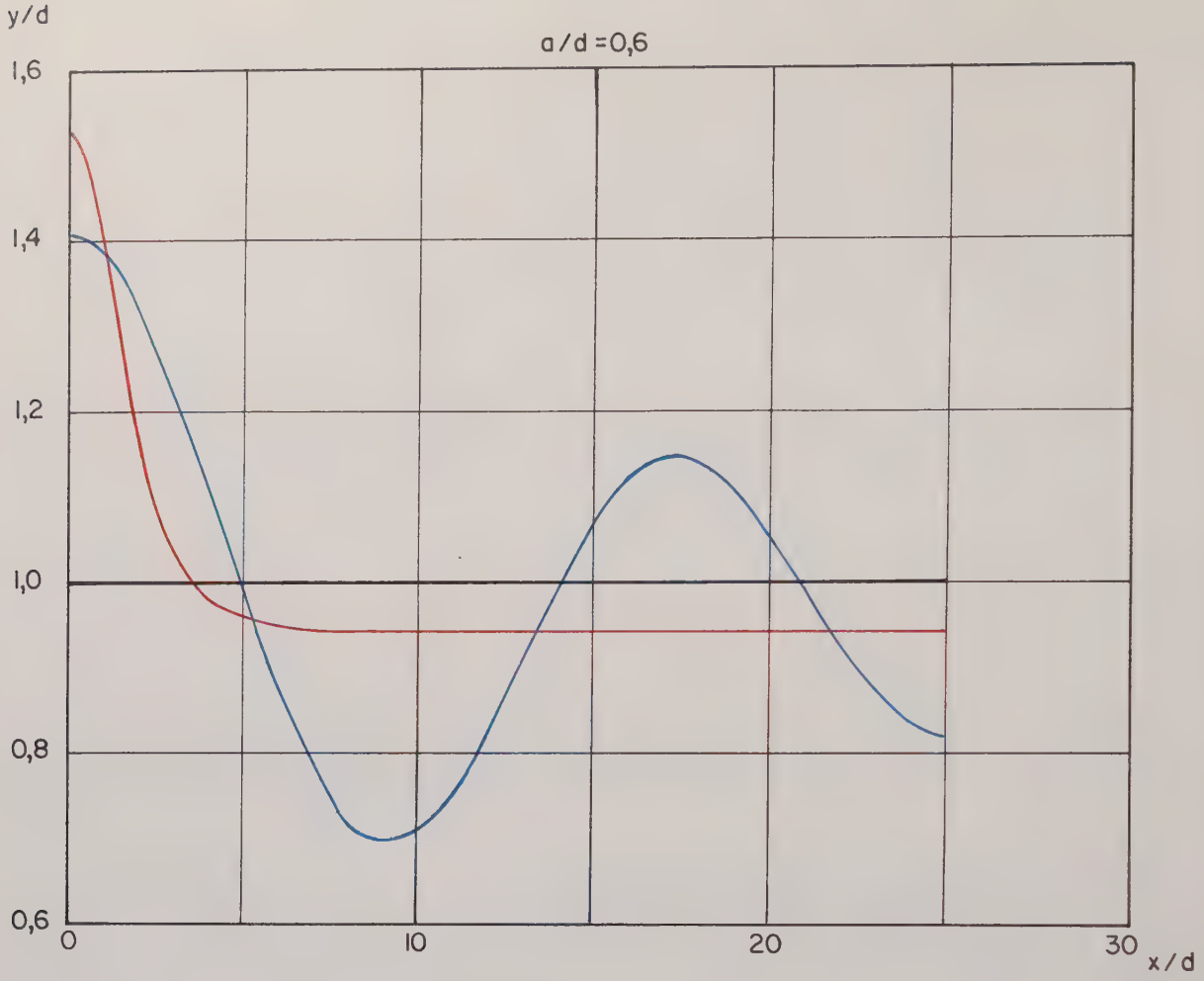
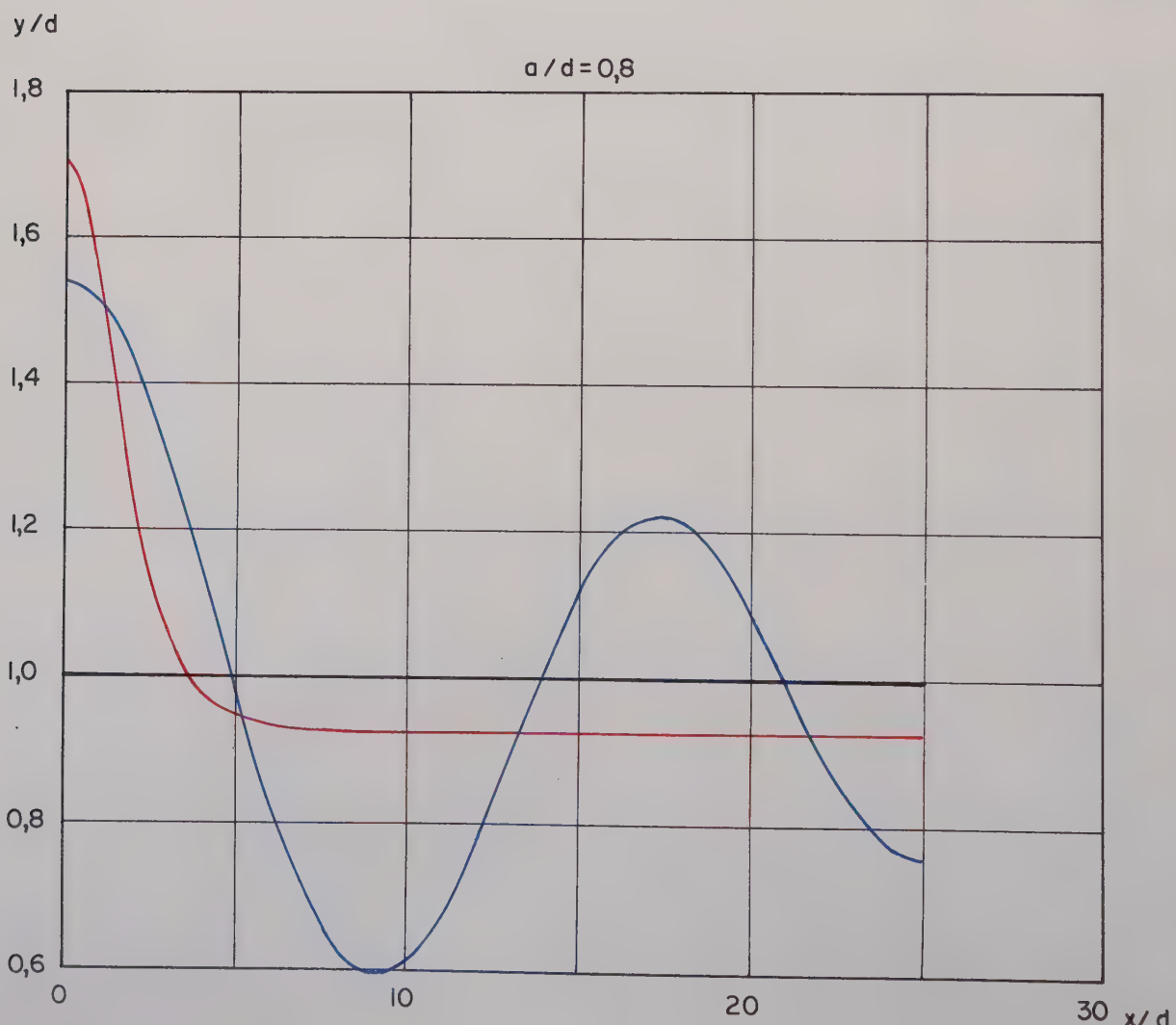


Planche 9

Longueur d'onde relative : $\frac{\lambda}{d} = 50$





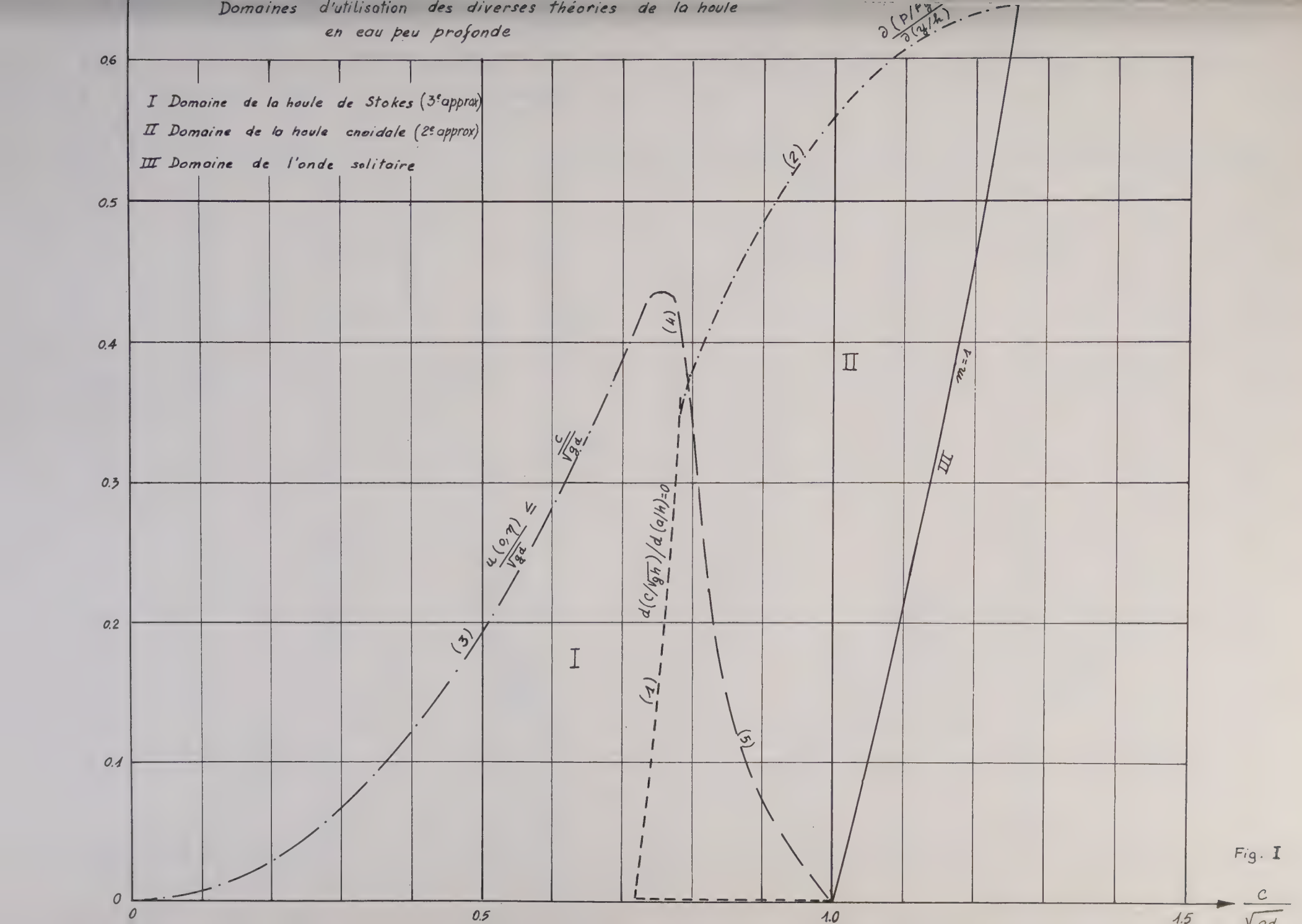
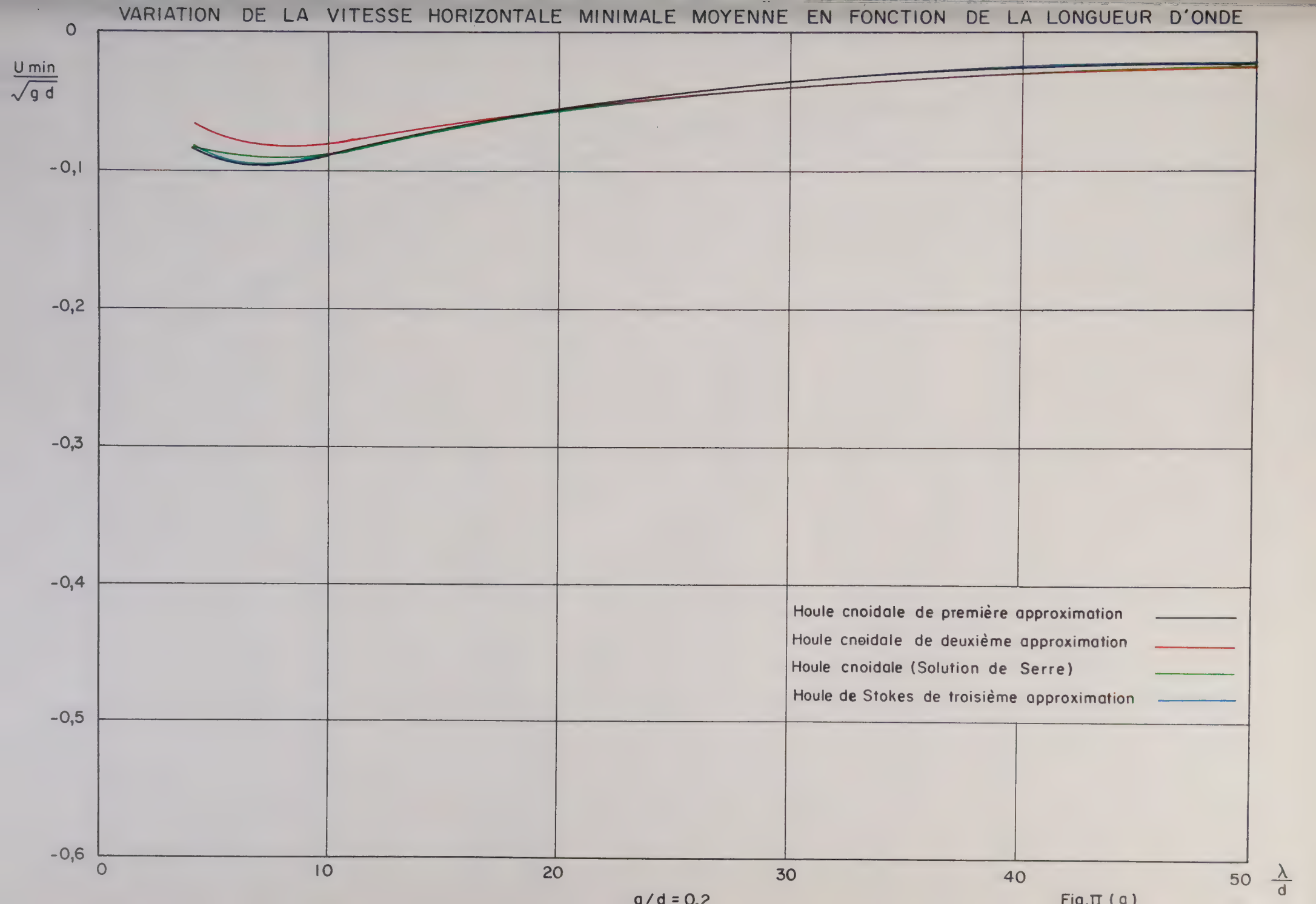

Domaines d'utilisation des diverses théories de la houle en eau peu profonde
I Domaine de la houle de Stokes (3e approx)
II Domaine de la houle cnoidale (2e approx)
III Domaine de l'onde solitaire
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
I
II
III
m=1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.5
1.0
1.5
C/√gd

Fig. I


VARIATION DE LA VITESSE HORIZONTALE MINIMALE MOYENNE EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE
U min / √g d
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
-0,6
0
10
20
30
40
50
λ / d
Houle cnoidale de première approximation
Houle cnoidale de deuxième approximation
Houle cnoidale (Solution de Serre)
Houle de Stokes de troisième approximation

g/d = 0,2

Fig. II (a)

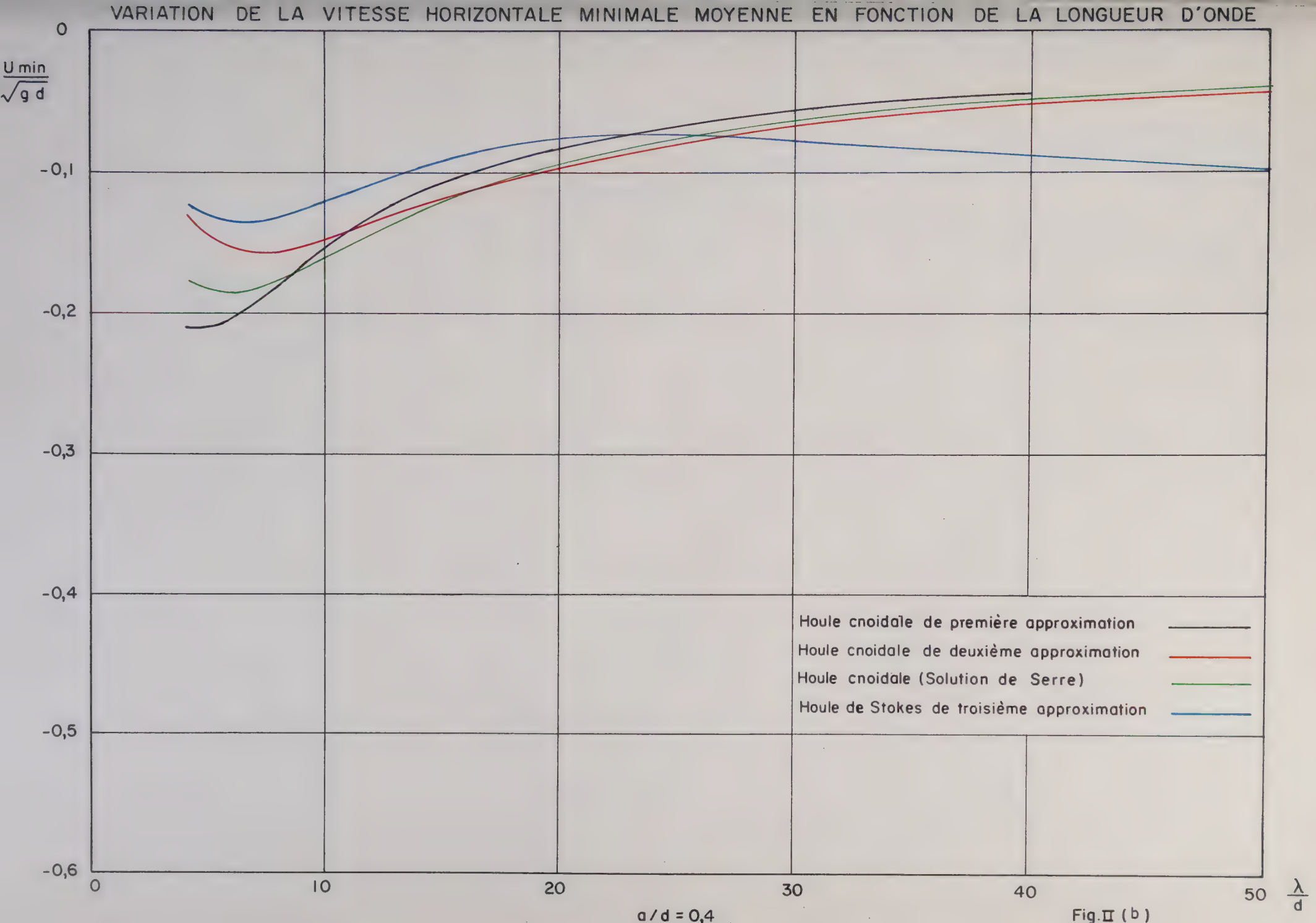

VARIATION DE LA VITESSE HORIZONTALE MINIMALE MOYENNE EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE
0
$\frac{U\,min}{\sqrt{g\,d}}$
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
-0,6
0
10
20
30
40
50
$\frac{\lambda}{d}$
Houle cnoidale de première approximation
Houle cnoidale de deuxième approximation
Houle cnoidale (Solution de Serre)
Houle de Stokes de troisième approximation
a/d = 0,4

Fig. II (b)

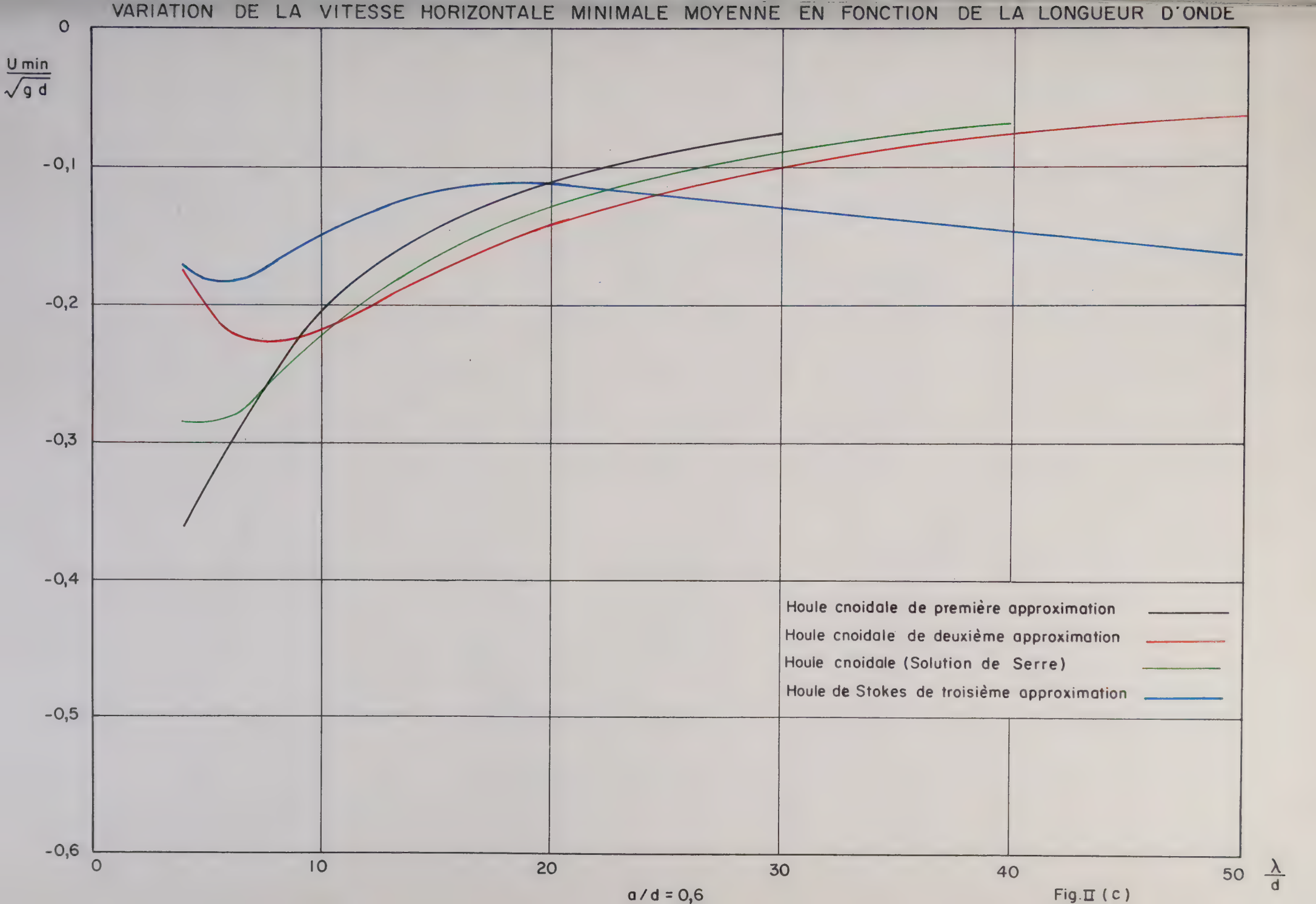
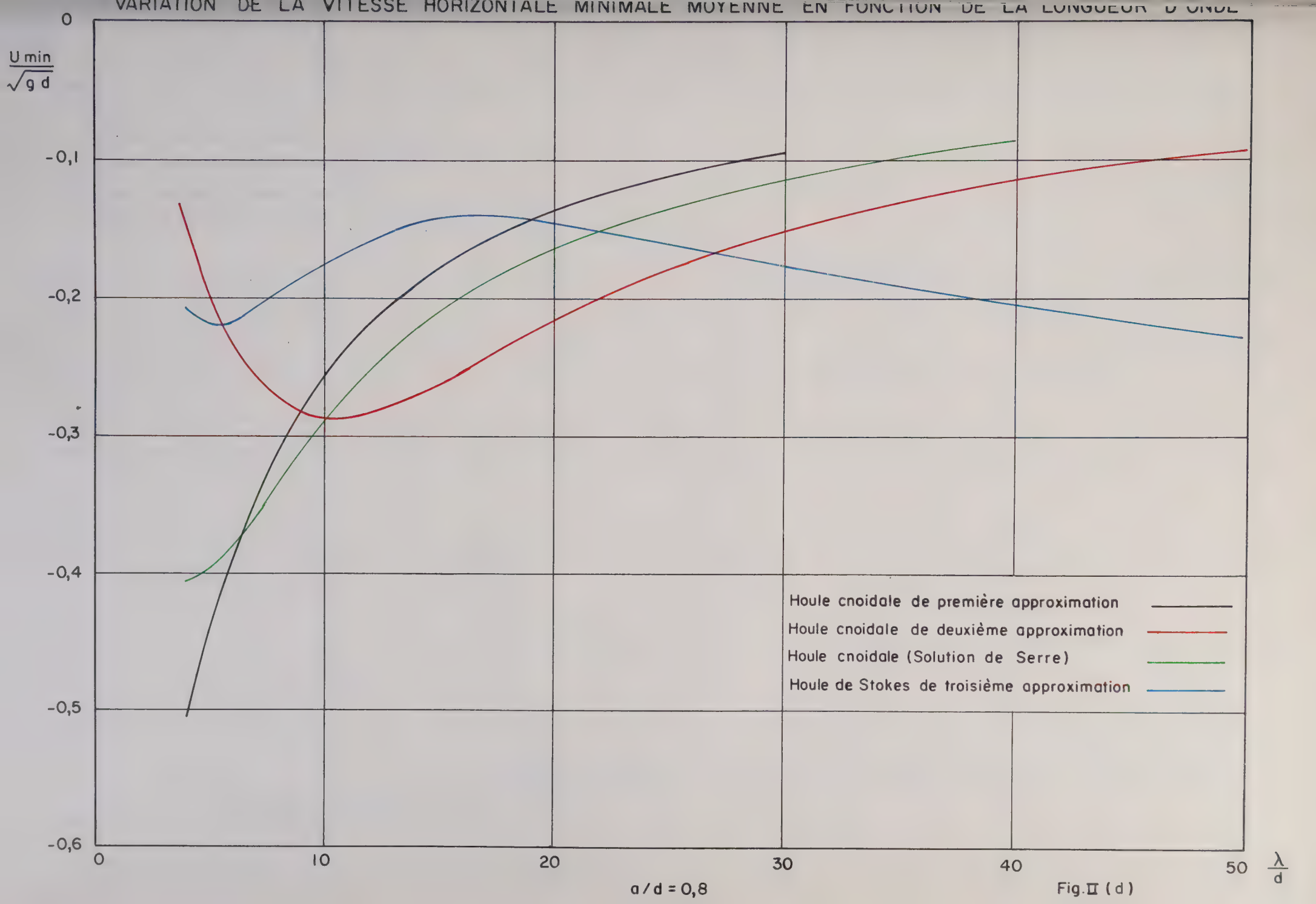

VARIATION DE LA VITESSE HORIZONTALE MINIMALE MOYENNE EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE
U min / √g d
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
-0,6
0
10
20
30
40
50
λ / d
Houle cnoidale de première approximation
Houle cnoidale de deuxième approximation
Houle cnoidale (Solution de Serre)
Houle de Stokes de troisième approximation
a / d = 0,6

Fig. II (c)


VARIATION DE LA VITESSE HORIZONTALE MINIMALE MOYENNE EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE
$\frac{U\,min}{\sqrt{g\,d}}$
0
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
-0,6
0
10
20
30
40
50
$\frac{\lambda}{d}$
Houle cnoidale de première approximation
Houle cnoidale de deuxième approximation
Houle cnoidale (Solution de Serre)
Houle de Stokes de troisième approximation
a/d = 0,8
Fig.II (d)

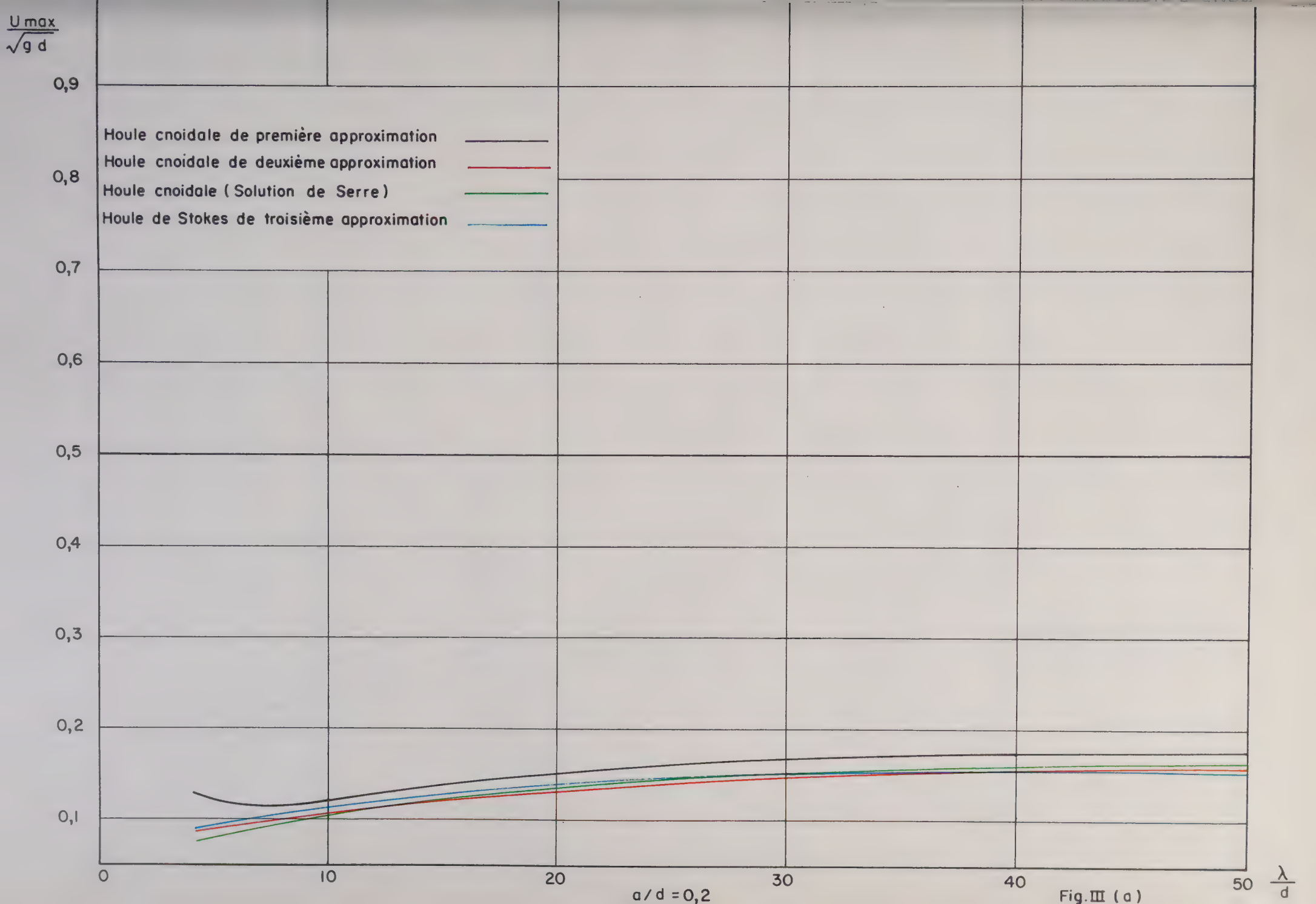

$\frac{U\,max}{\sqrt{g\,d}}$
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
Houle cnoidale de première approximation
Houle cnoidale de deuxième approximation
Houle cnoidale (Solution de Serre)
Houle de Stokes de troisième approximation
0
10
20
30
40
50
$\frac{\lambda}{d}$
a / d = 0,2

Fig. III (a)

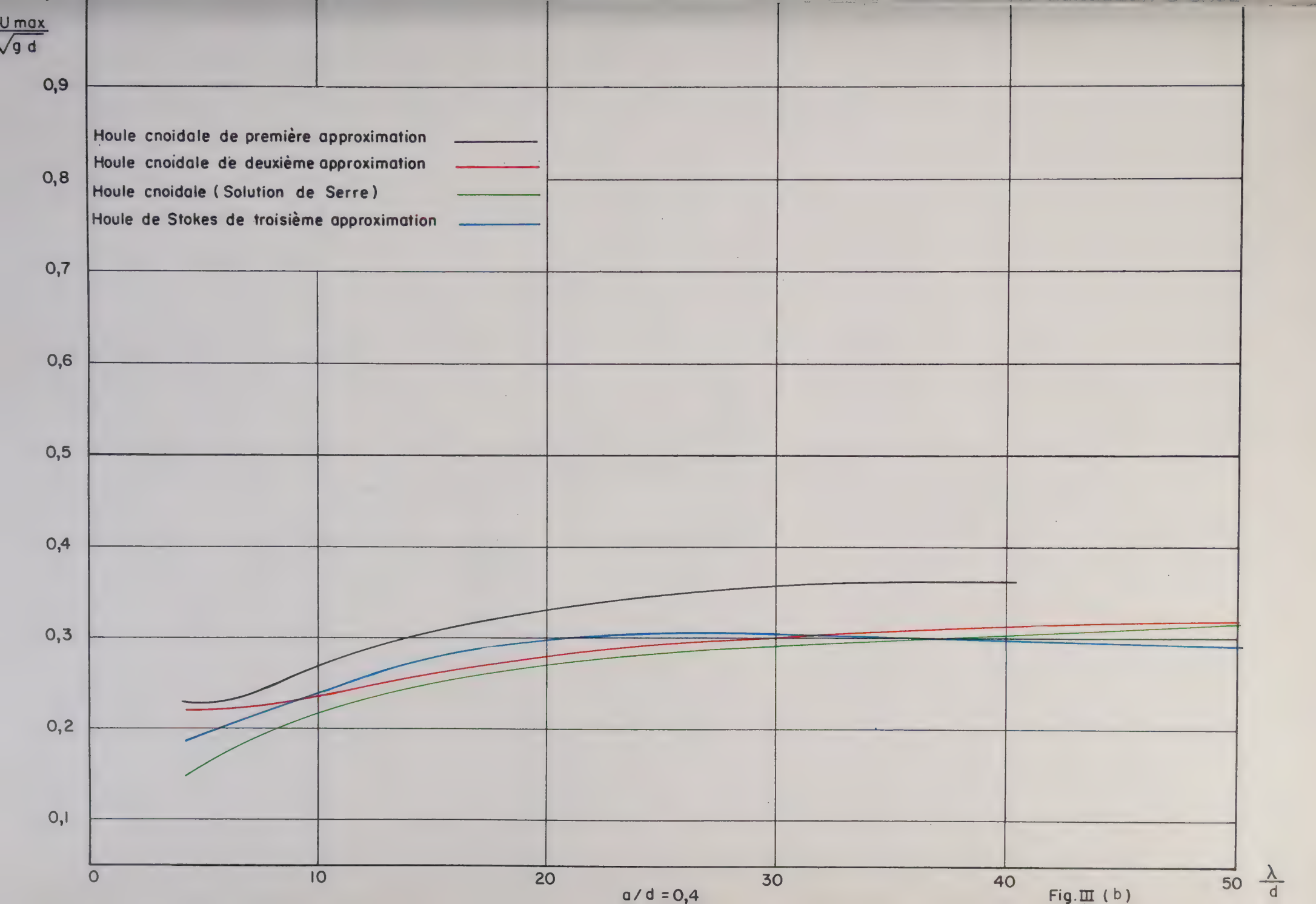
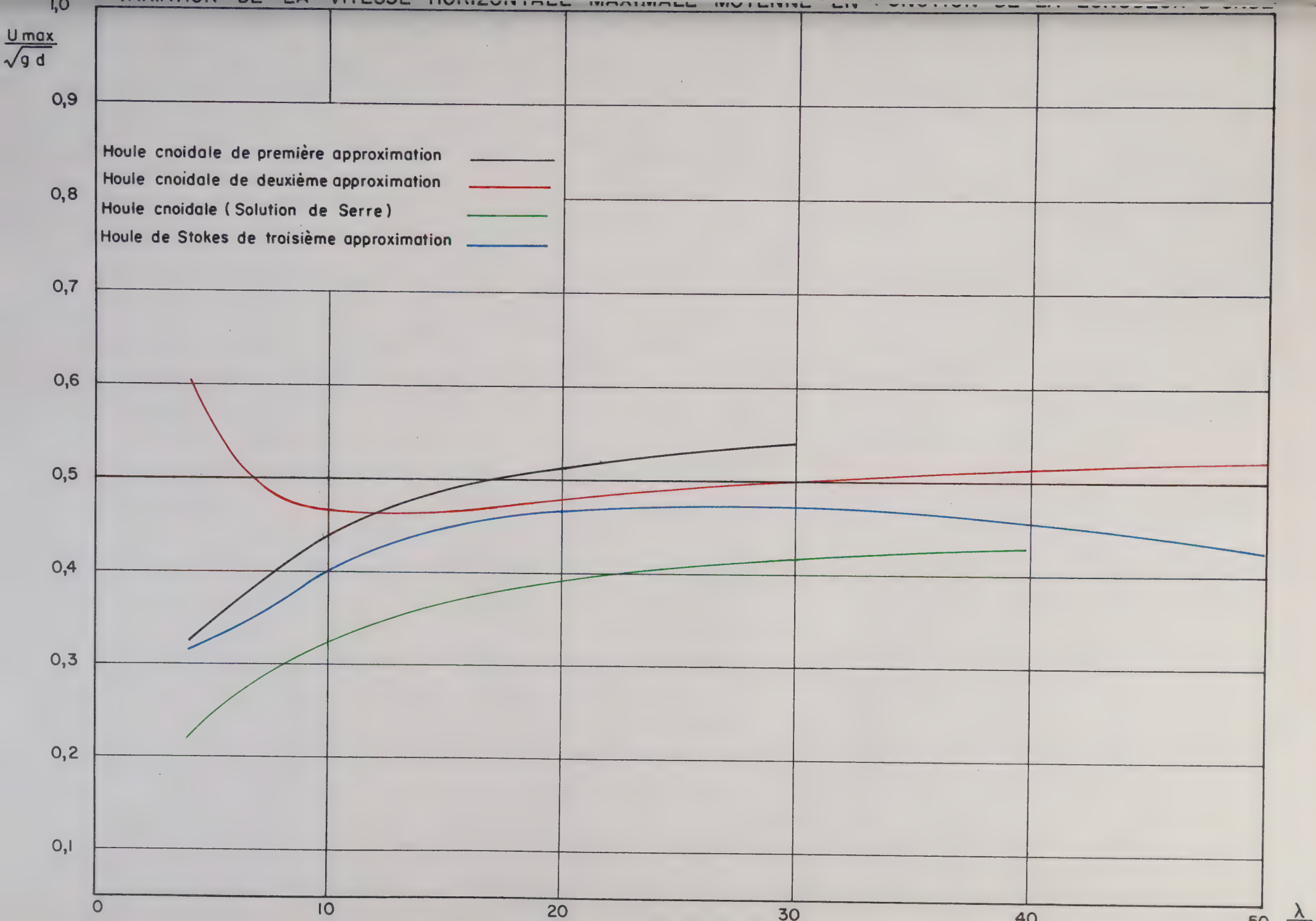
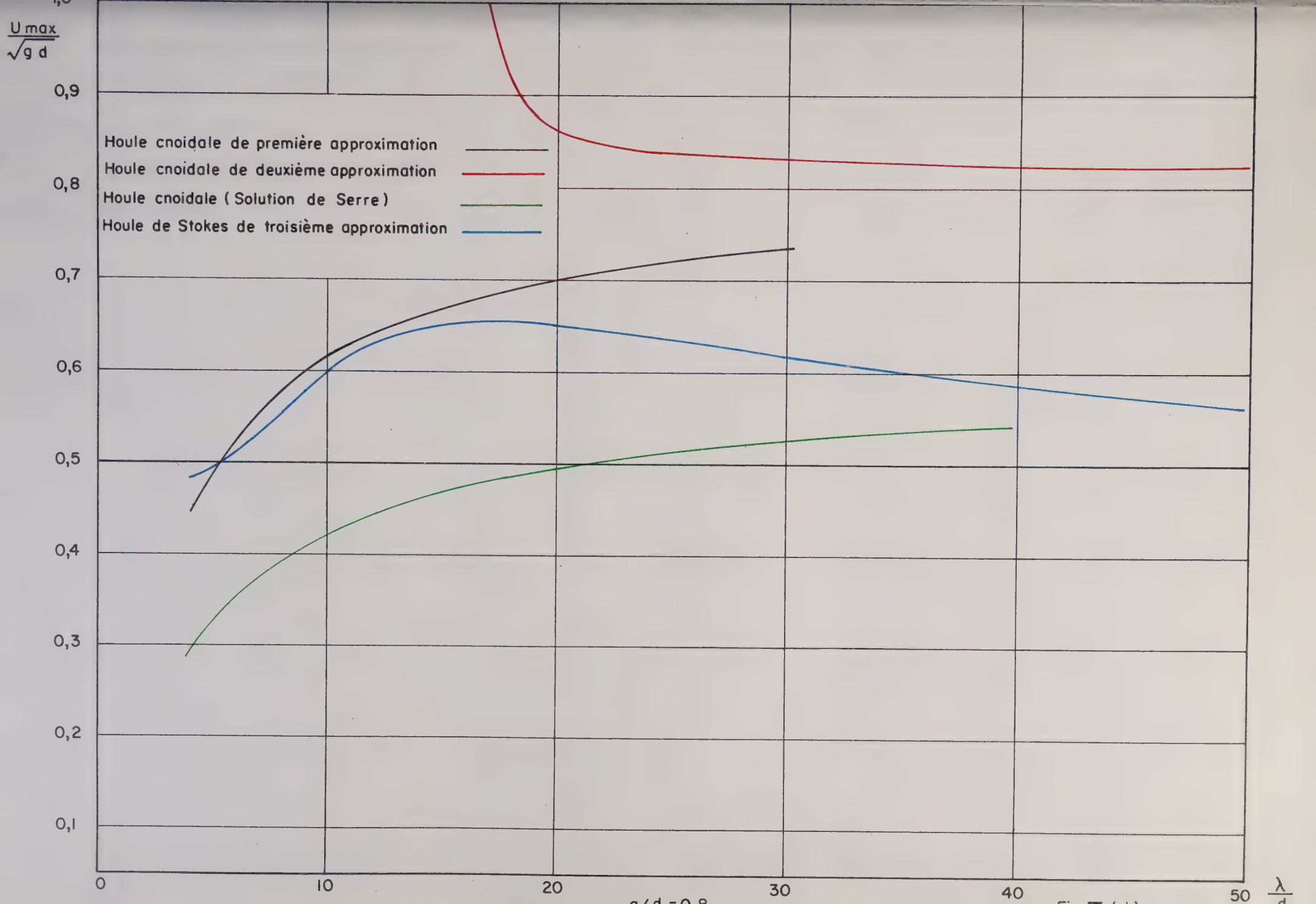

$\frac{U\,max}{\sqrt{g\,d}}$
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
Houle cnoidale de première approximation
Houle cnoidale de deuxième approximation
Houle cnoidale (Solution de Serre)
Houle de Stokes de troisième approximation
0
10
20
30
40
50
$\frac{\lambda}{d}$
a / d = 0,4

Fig. III (b)


VARIATION DE LA VITESSE HORIZONTALE MAXIMALE MOYENNE EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE
$\frac{U\,max}{\sqrt{g\,d}}$
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
Houle cnoidale de première approximation
Houle cnoidale de deuxième approximation
Houle cnoidale (Solution de Serre)
Houle de Stokes de troisième approximation
0
10
20
30
40
50
$\frac{\lambda}{d}$


$\frac{U\,max}{\sqrt{g\,d}}$
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
Houle cnoidale de première approximation
Houle cnoidale de deuxième approximation
Houle cnoidale (Solution de Serre)
Houle de Stokes de troisième approximation
0
10
20
30
40
50
$\frac{\lambda}{d}$

DISTRIBUTION DES VITESSES HORIZONTALES DANS UNE SECTION SITUÉE EN CRÊTE a/d=0,2

Houle cnoidale de première approximation
Houle cnoidale de deuxième approximation
moyenne
Houle cnoidale (Solution de Serre)
Houle de Stokes de troisième approximation
moy.

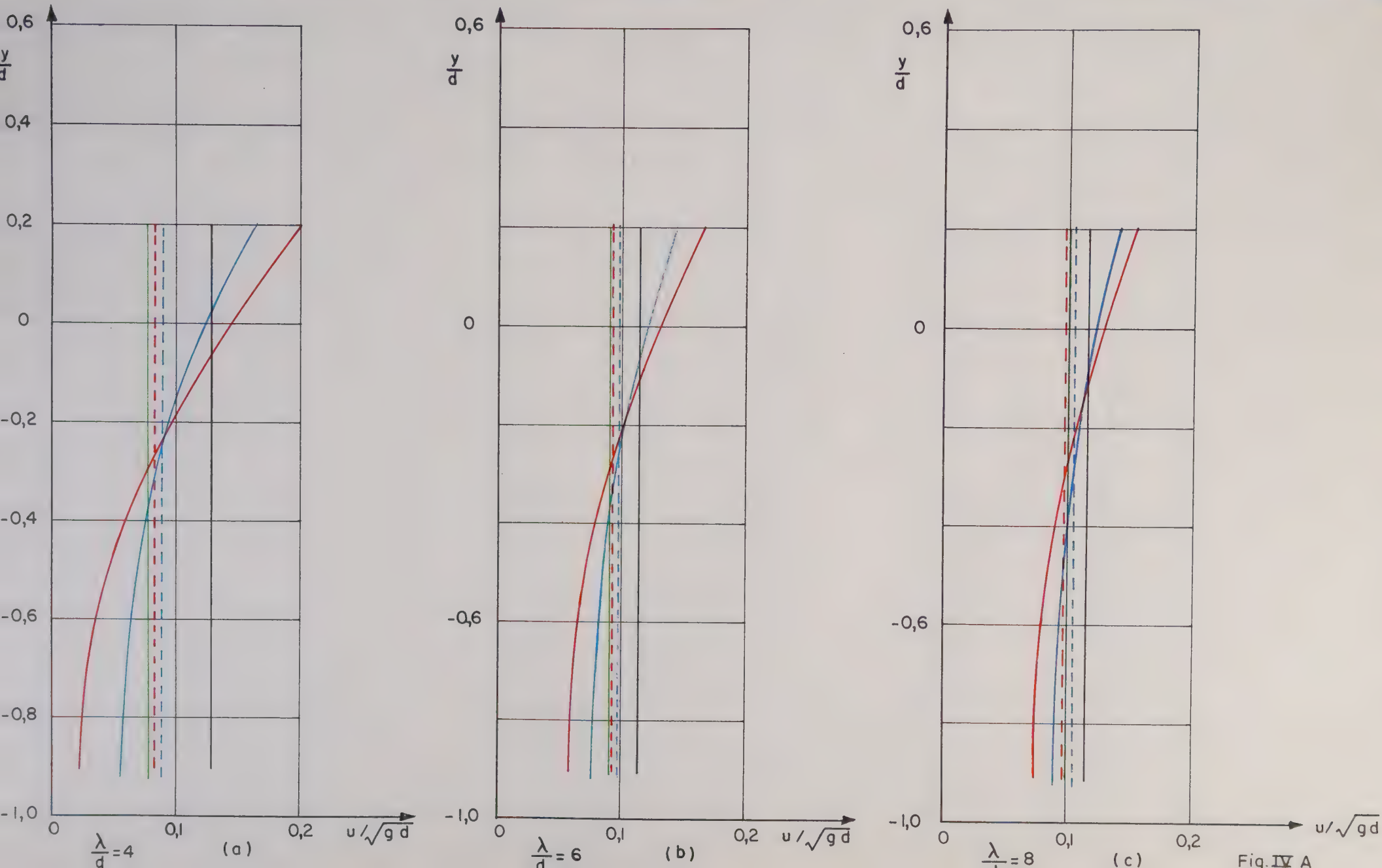


Fig. IV A

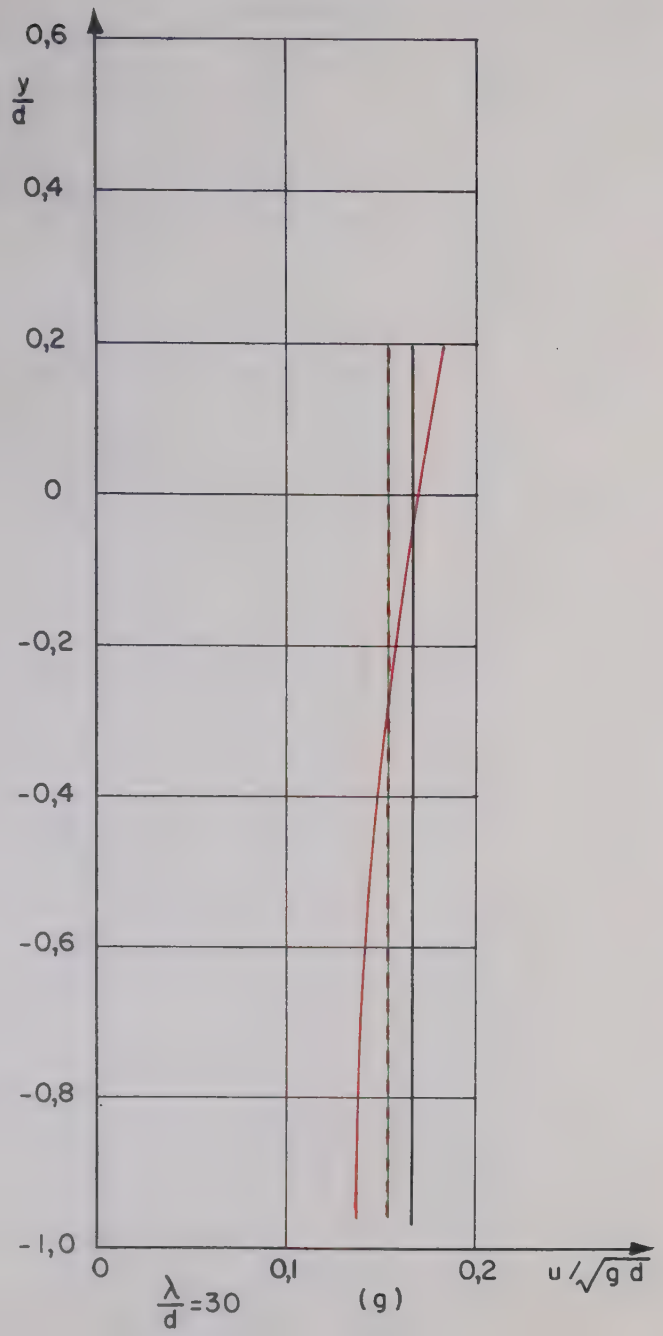
DISTRIBUTION DES VITESSES HORIZONTALES DANS UNE SECTION SITUÉE EN CRÊTE a/d=0,2

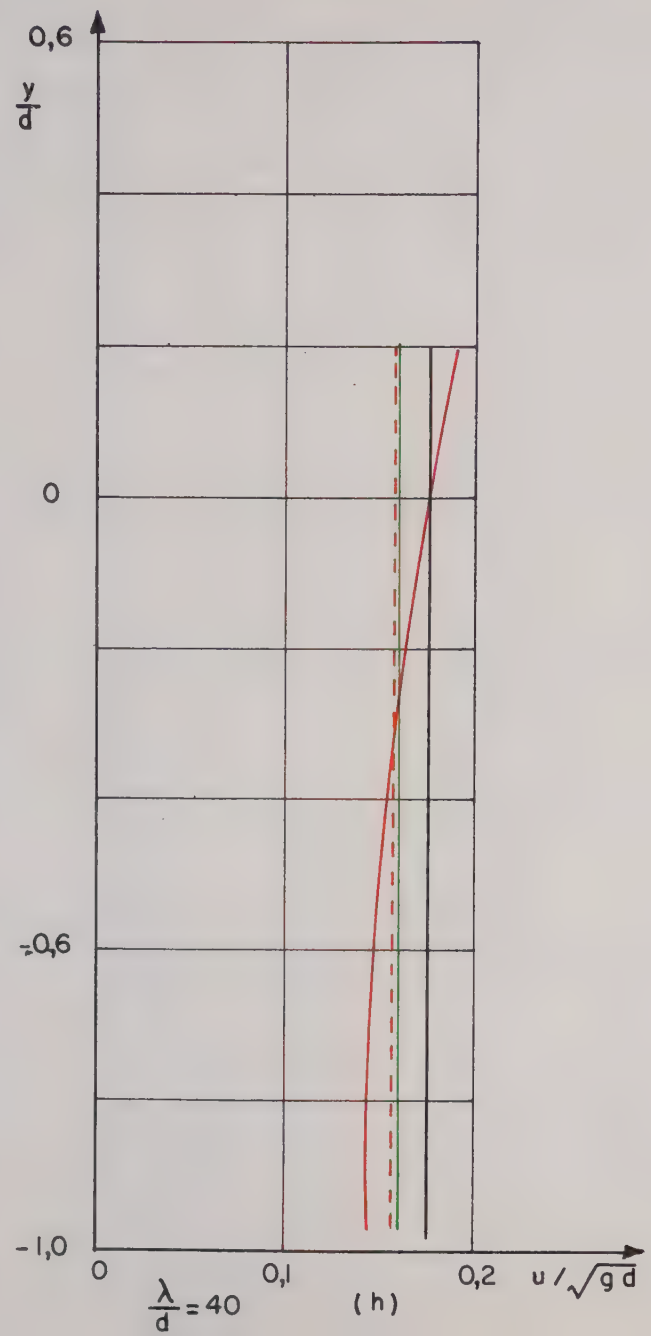
Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

moyenne

Houle cnoidale (Solution de Serre)





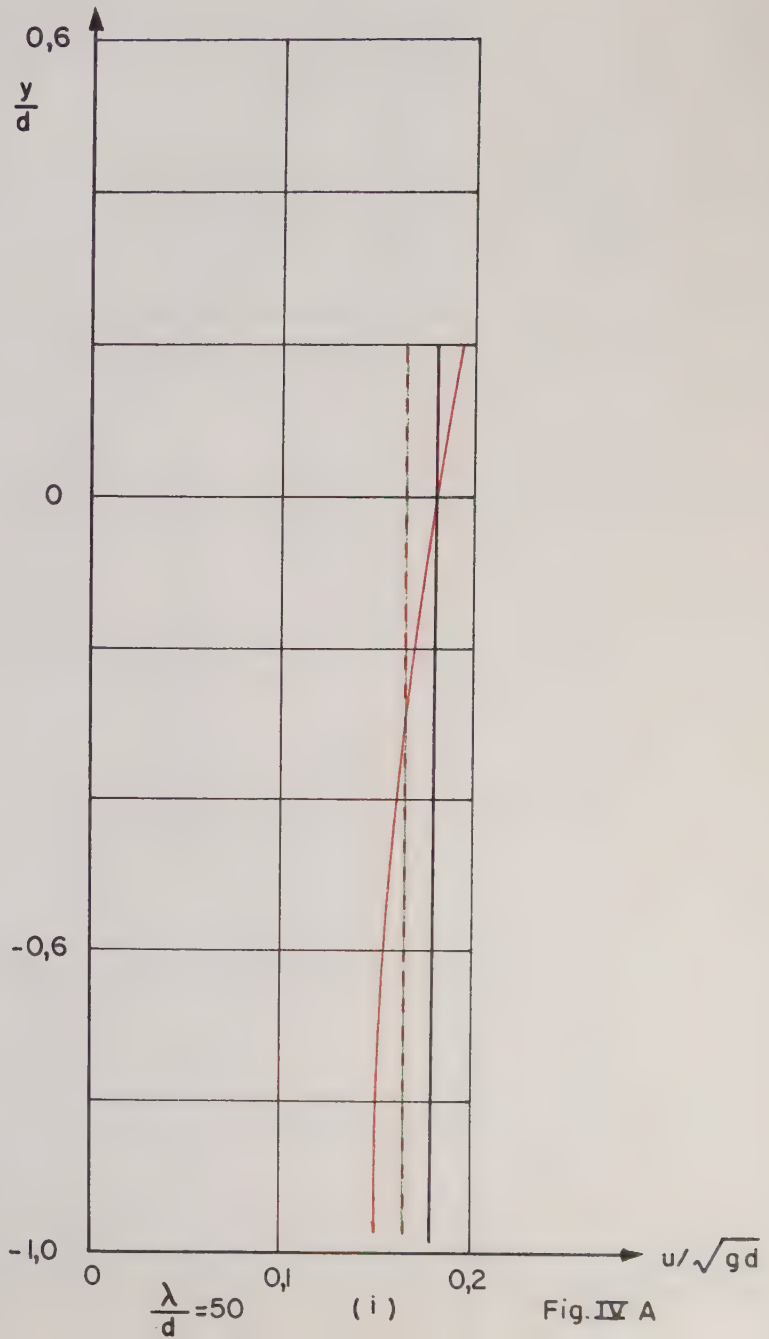


Fig. IV A

DISTRIBUTION DES VITESSES HORIZONTALES DANS UNE SECTION SITUÉE EN CRÊTE

Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

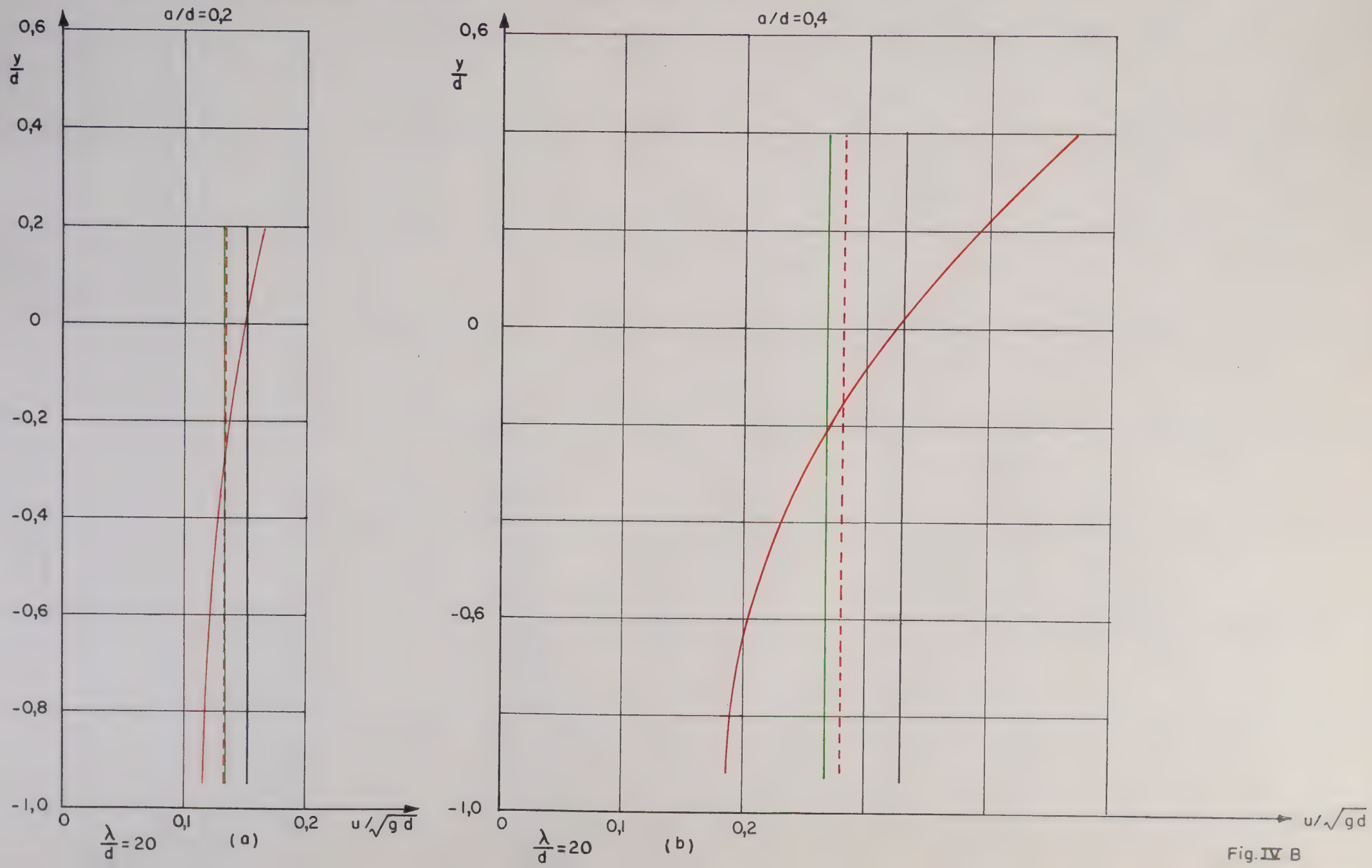


Fig. IV B

DISTRIBUTION DES VITESSES HORIZONTALES DANS UNE SECTION SITUEE EN CRETE $a/d = 0,6$

Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

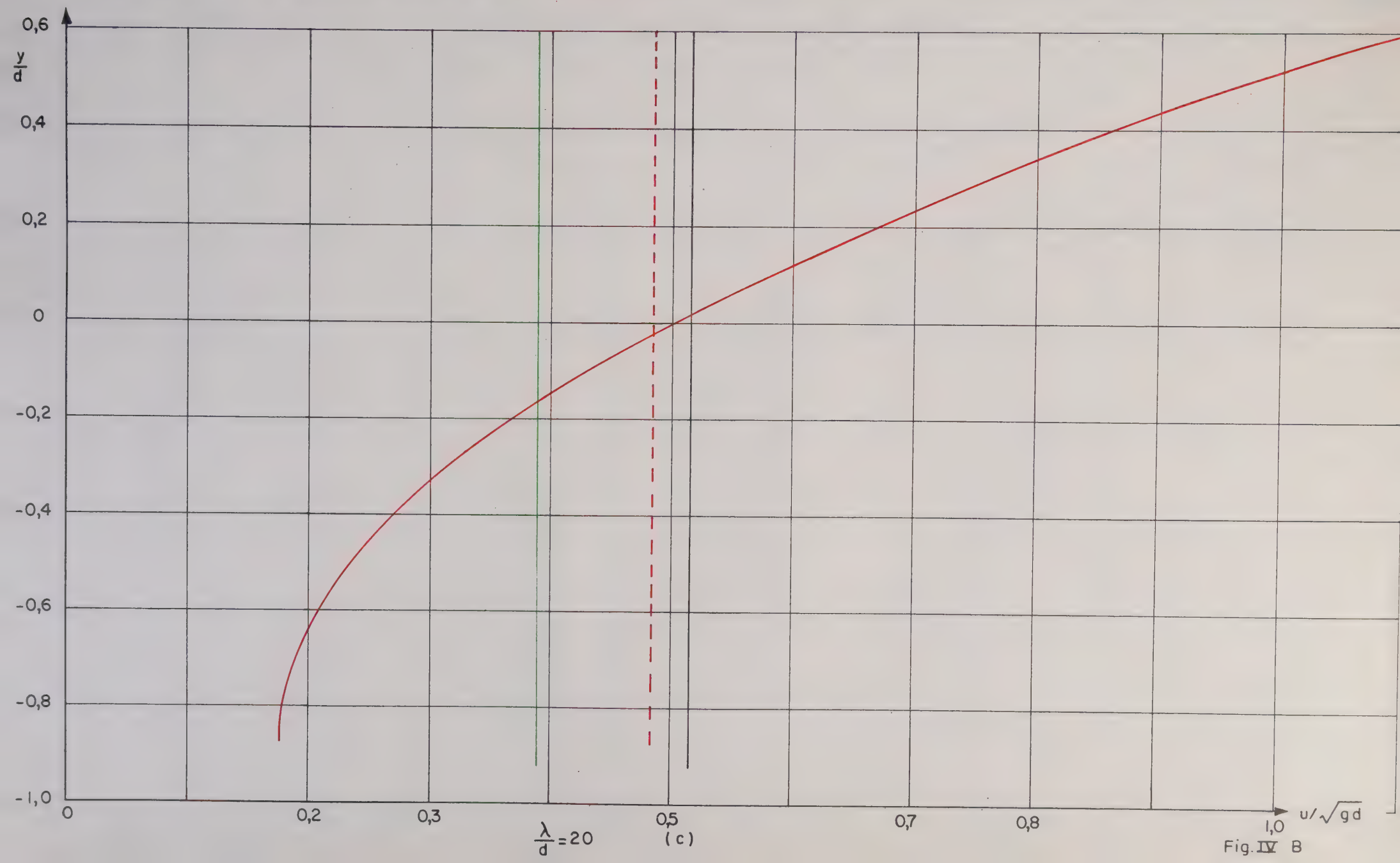


Fig. IV B

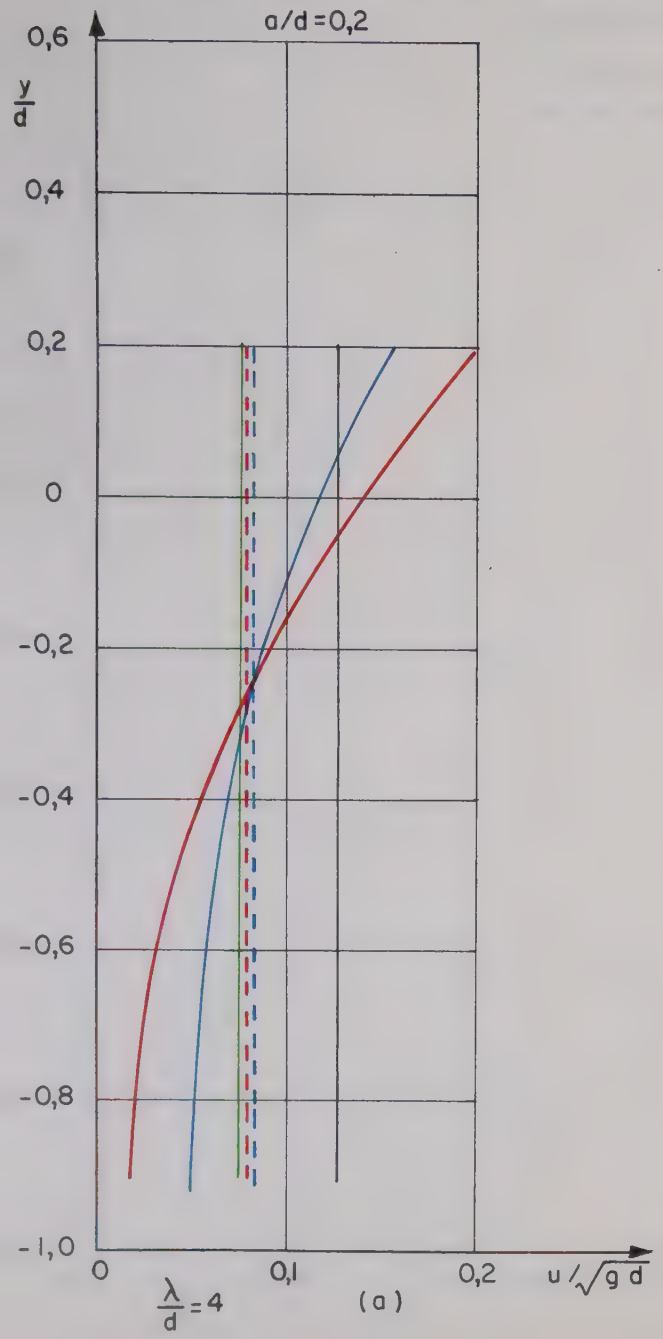
DISTRIBUTION DES VITESSES HORIZONTALES DANS UNE SECTION SITUEE EN CRETE

Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation — moyenne

Houle cnoidale (Solution de Serre)

Houle de Stokes de troisième approximation — moy.



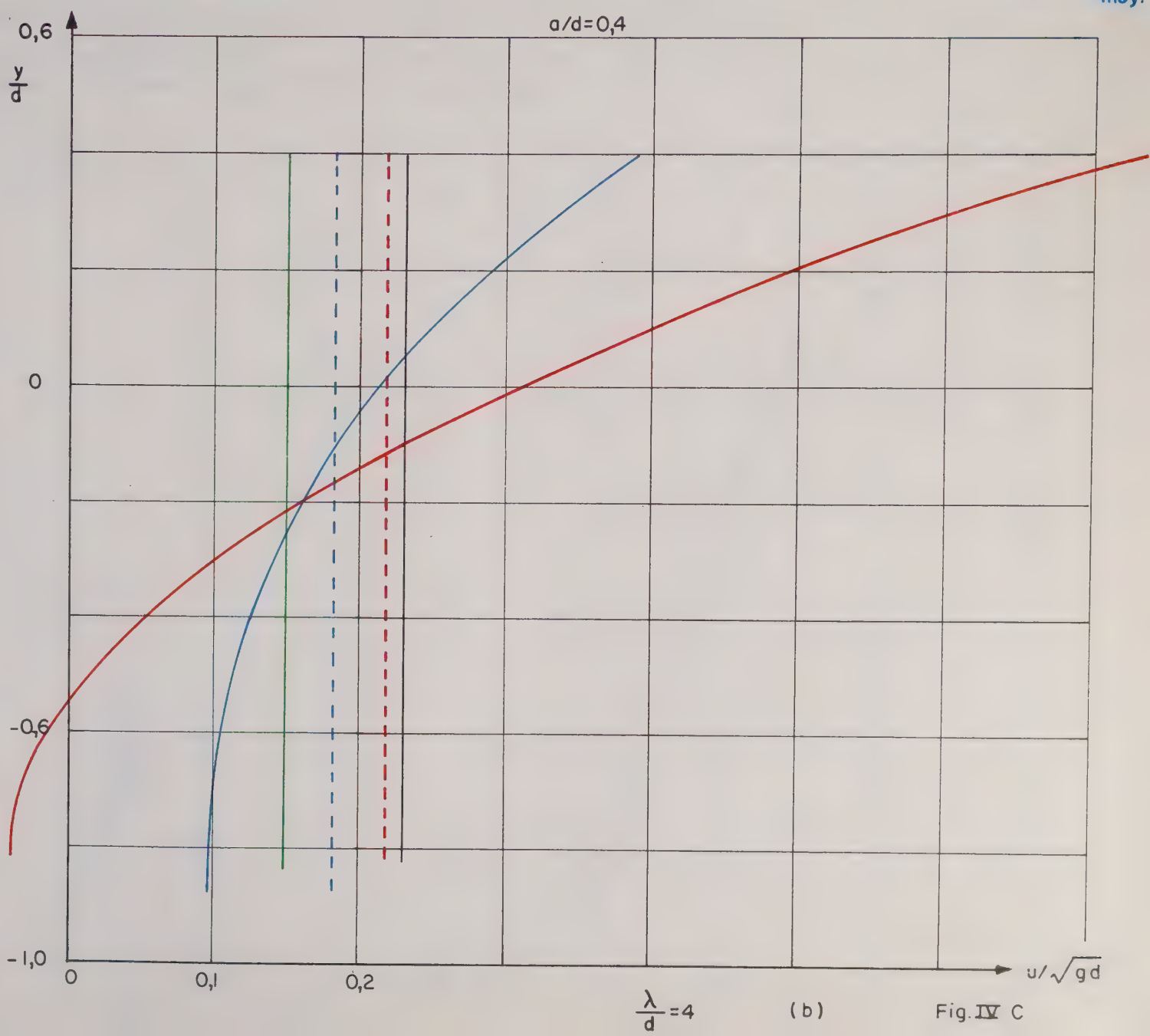


Fig. IV C

DISTRIBUTION DES VITESSES VERTICALES DANS UNE SECTION OU $\eta = d$ $a/d = 0{,}2$

Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

Houle de Stokes de troisième approximation

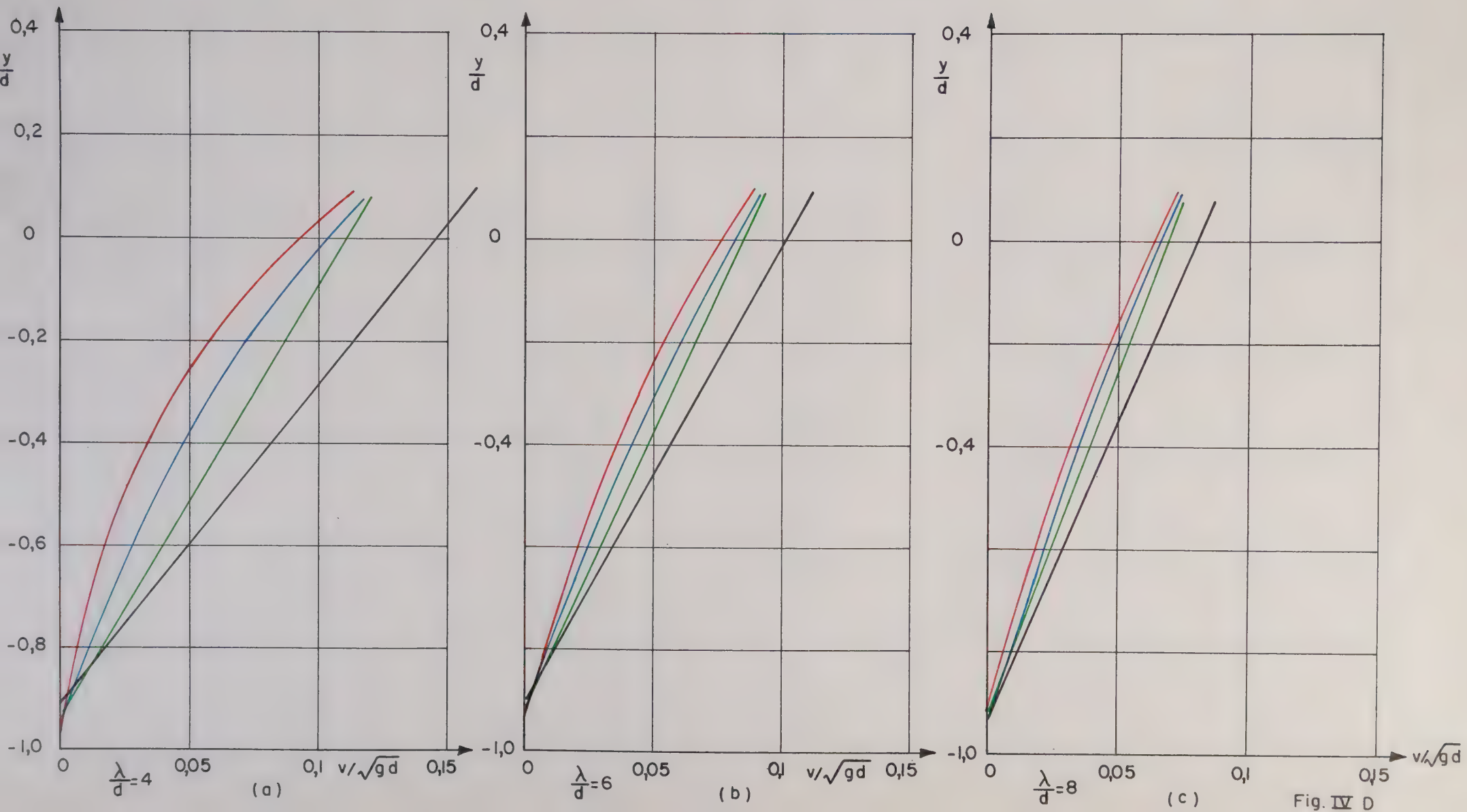


Fig. IV D

DISTRIBUTION DES VITESSES VERTICALES DANS UNE SECTION OU $\eta = d$ $a/d = 0{,}2$

Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

Houle de Stokes de troisième approximation

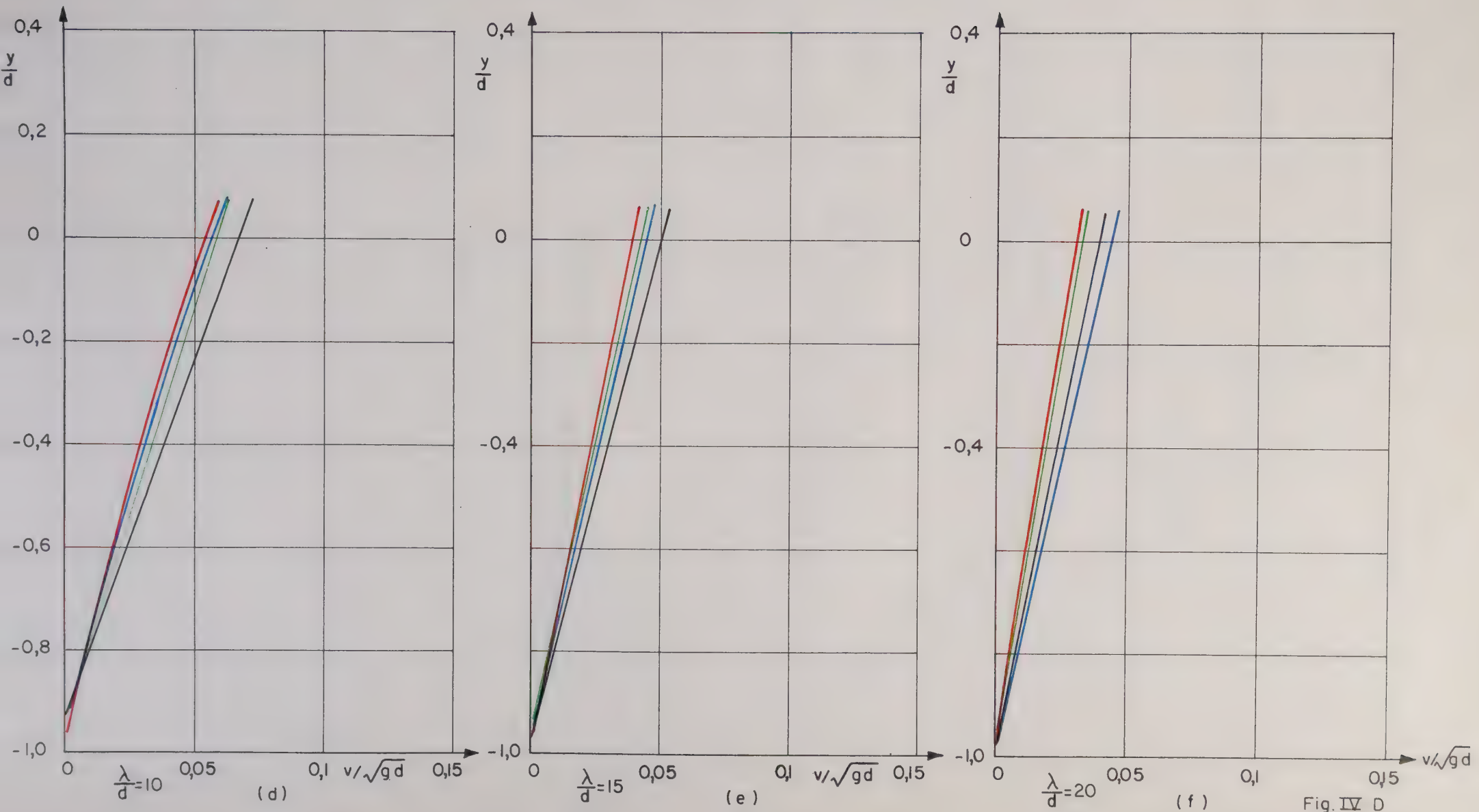


Fig. IV D

DISTRIBUTION DES VITESSES VERTICALES DANS UNE SECTION OU $\eta = d$ $a/d = 0{,}2$

Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

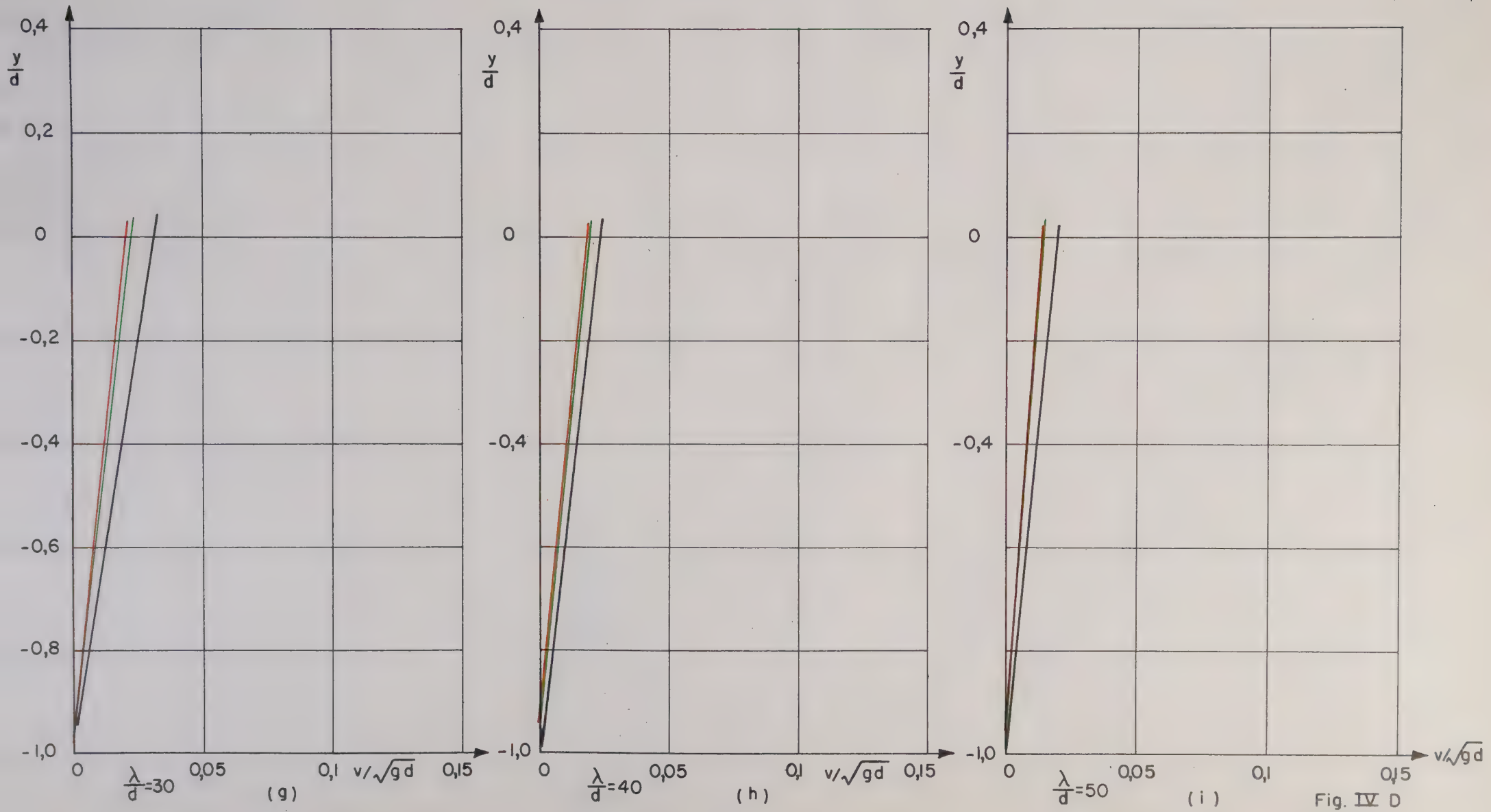


Fig. IV D

DISTRIBUTION DES VITESSES VERTICALES DANS UNE SECTION OU $\eta = d$

Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

Houle de Stokes de troisième approximation

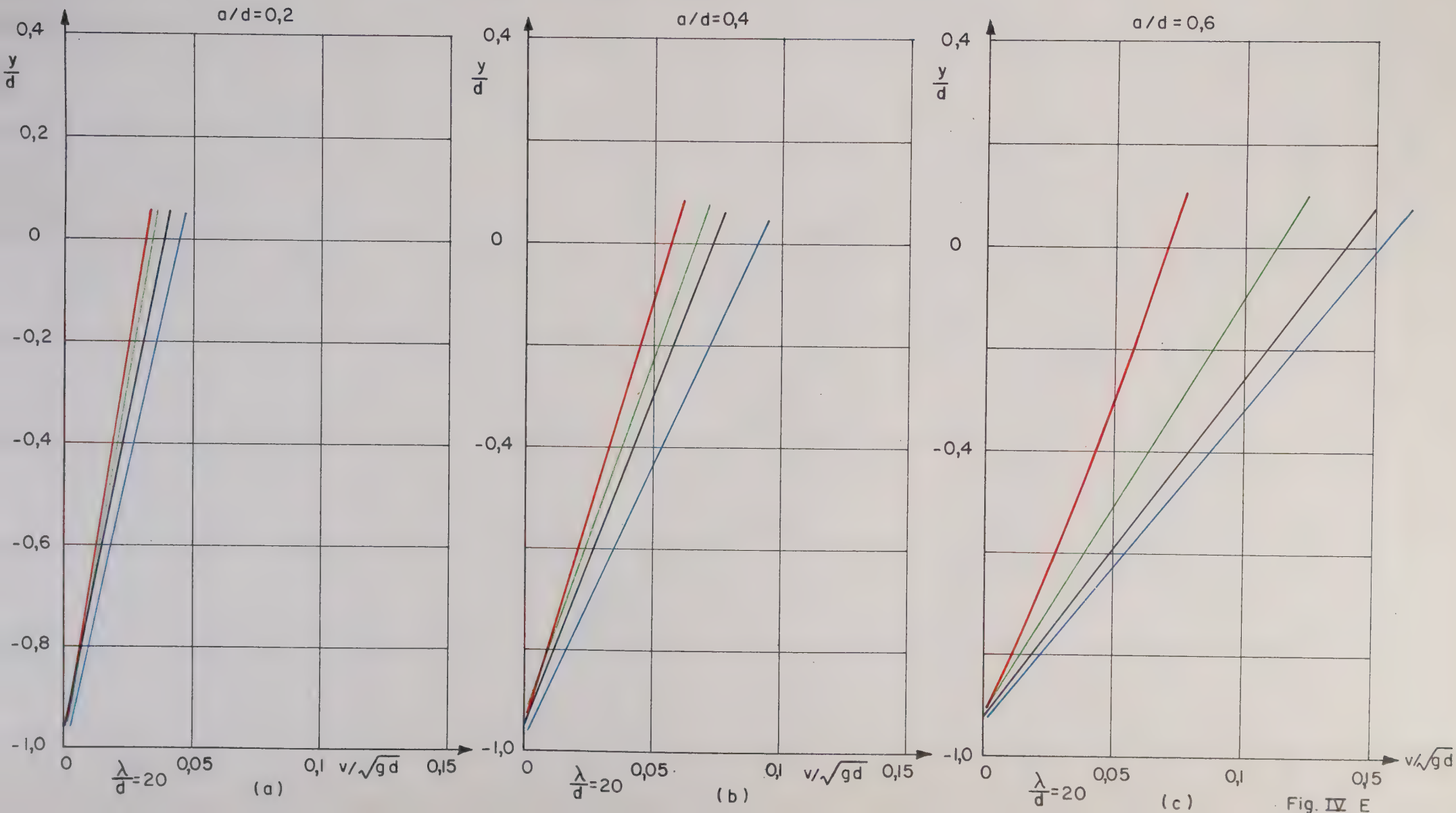


Fig. IV E

DISTRIBUTION DES VITESSES VERTICALES DANS UNE SECTION OU $\eta = d$

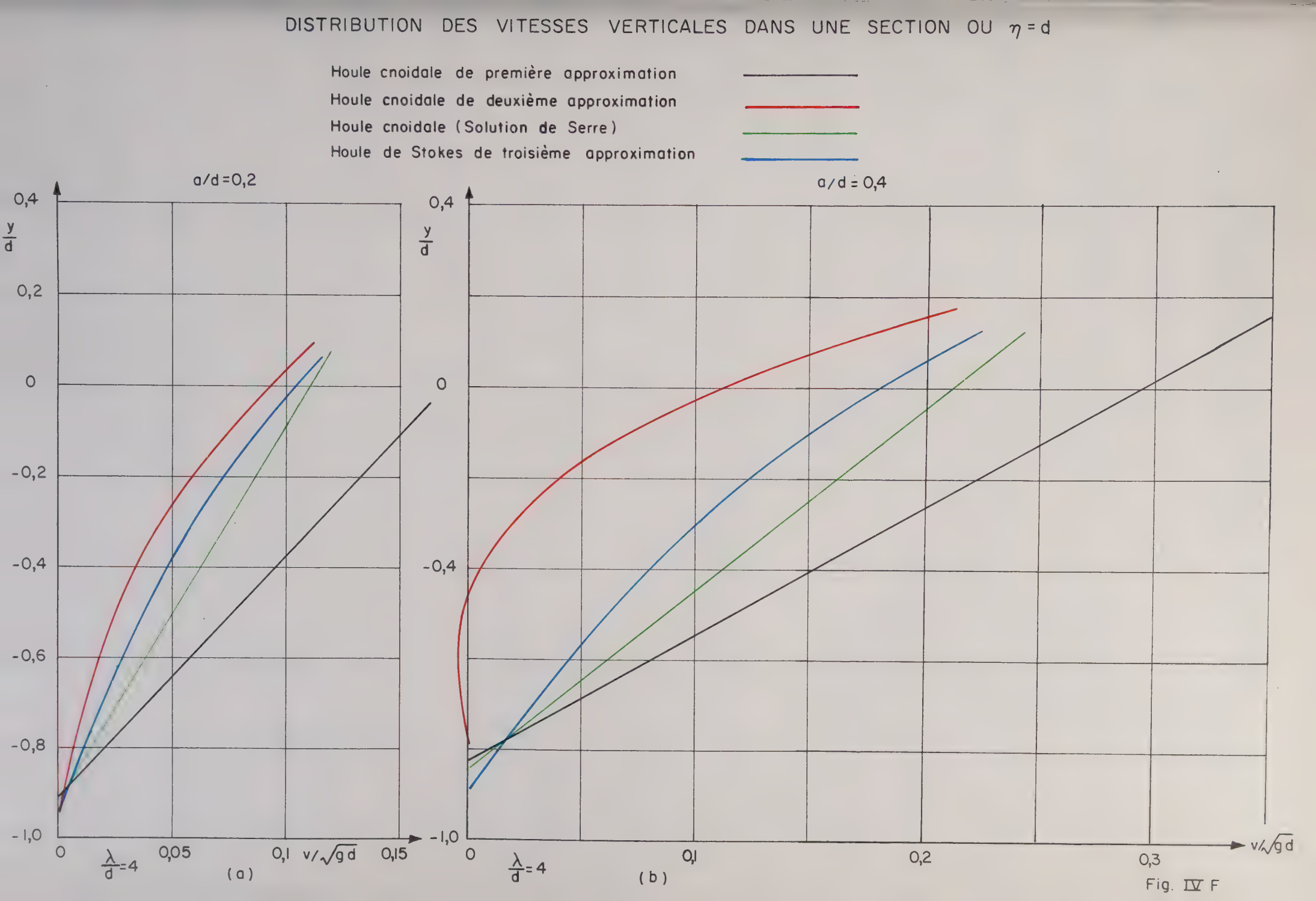


Fig. IV F

HOULE CNOIDALE DE DEUXIEME APPROXIMATION

Courbes des célérités en fonction de la longueur d'onde pour a/h = cte

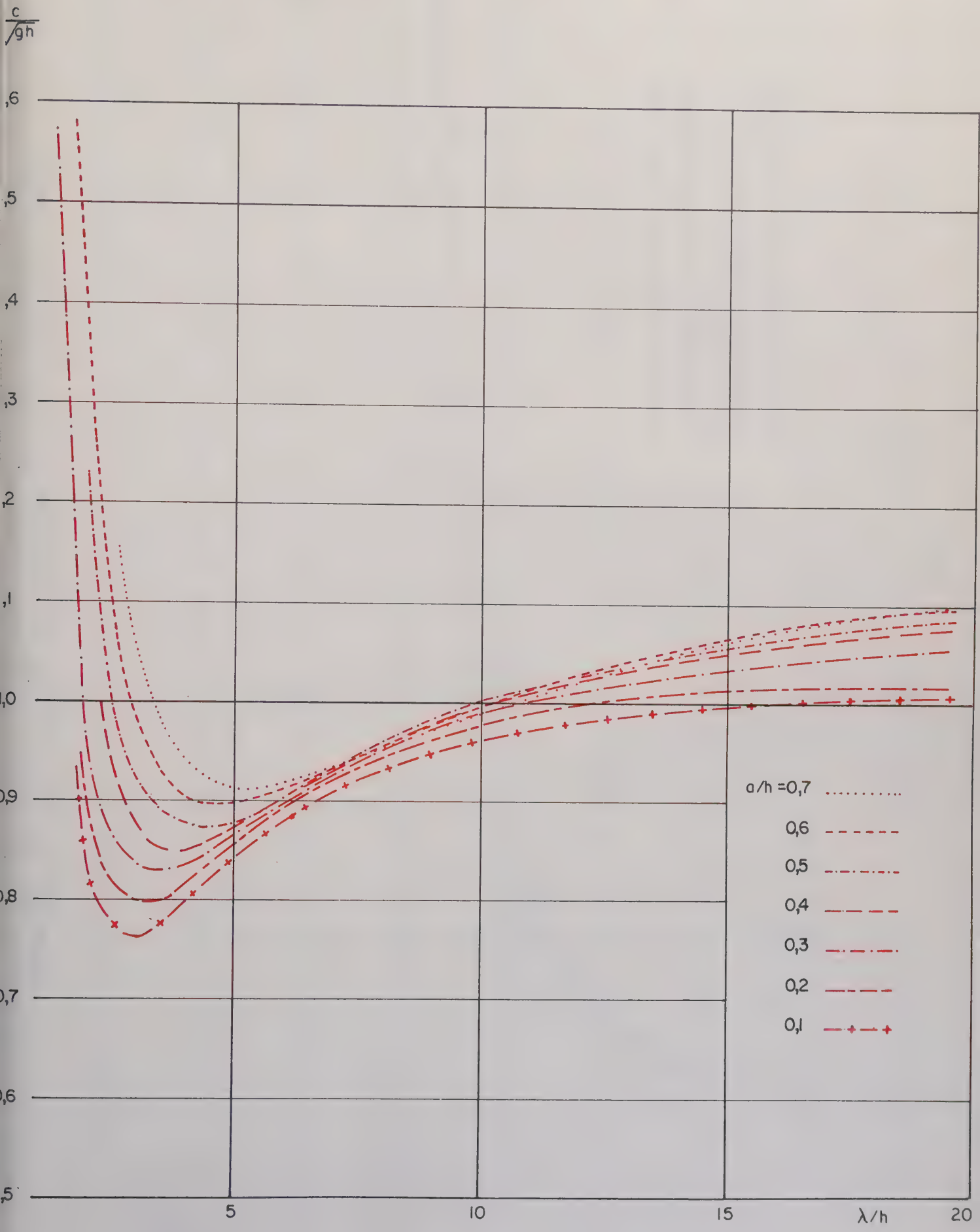
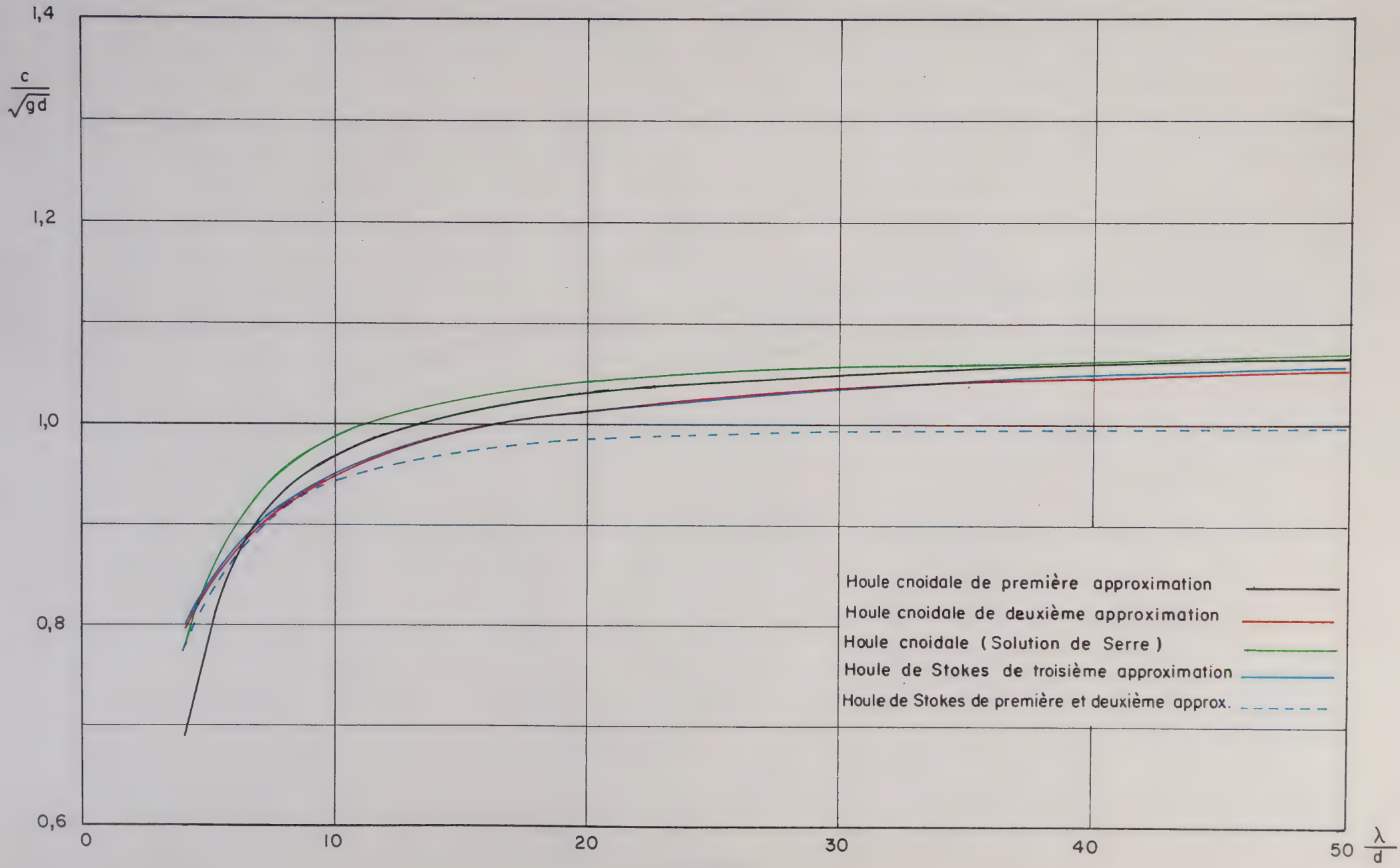


Fig. V

VARIATION DE LA CELERITÉ EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE



a / d = 0,2

Fig. VI (a)

VARIATION DE LA CELERITÉ EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE

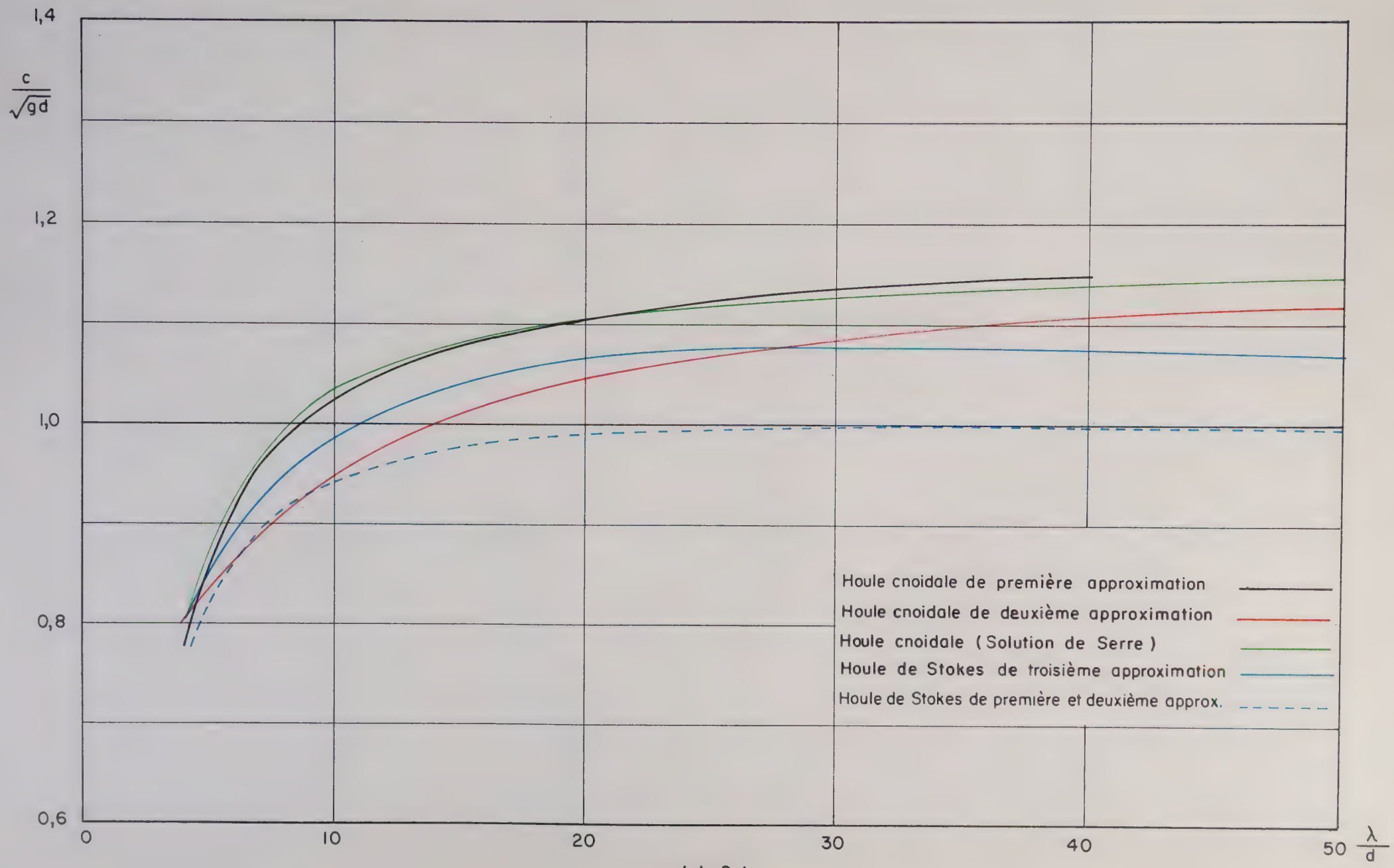


Fig. VI (b)

VARIATION DE LA CELERITÉ EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE

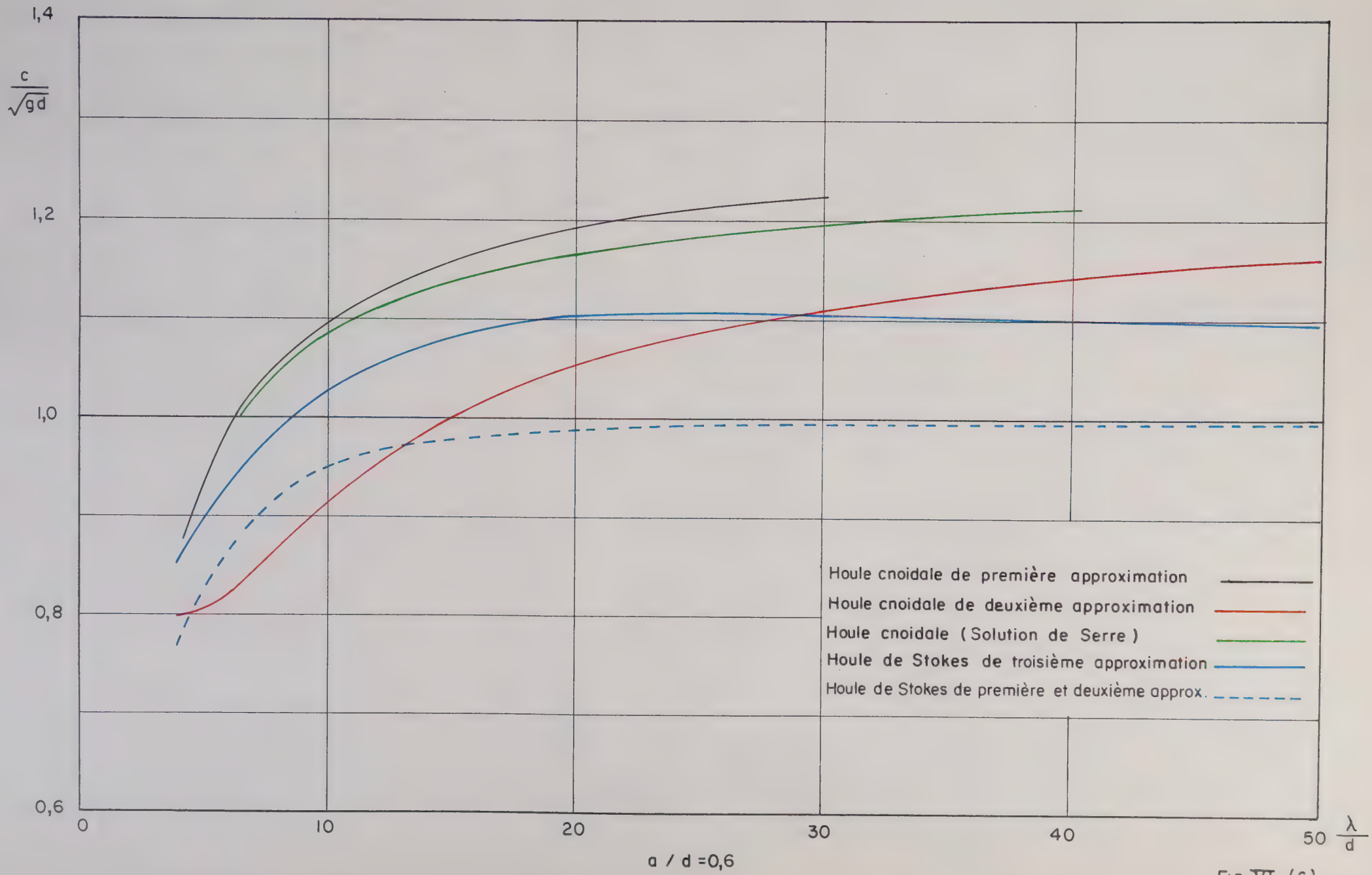
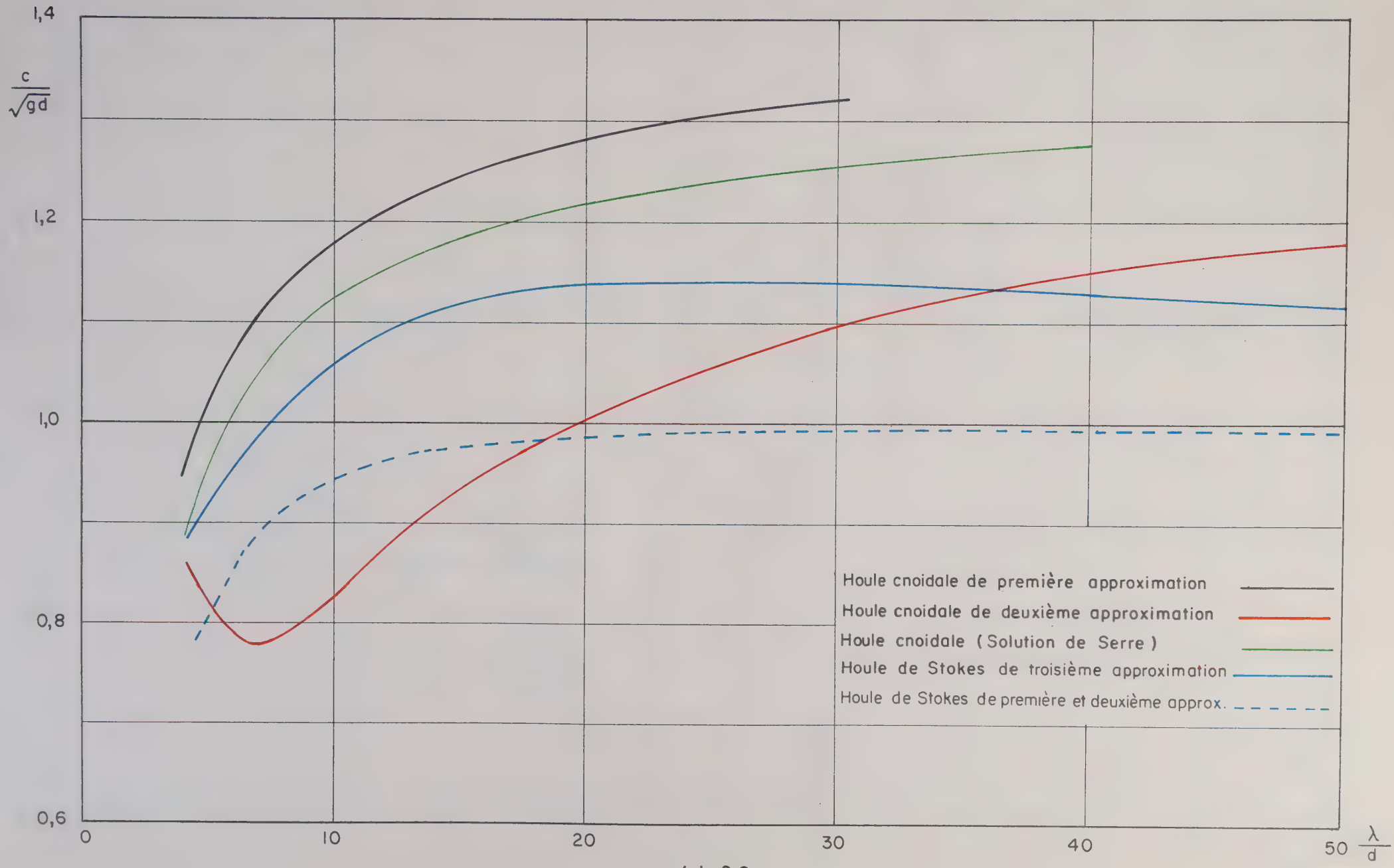


Fig. VI (c)

VARIATION DE LA CELERITÉ EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE



a / d =0,8

Fig. VI (d)

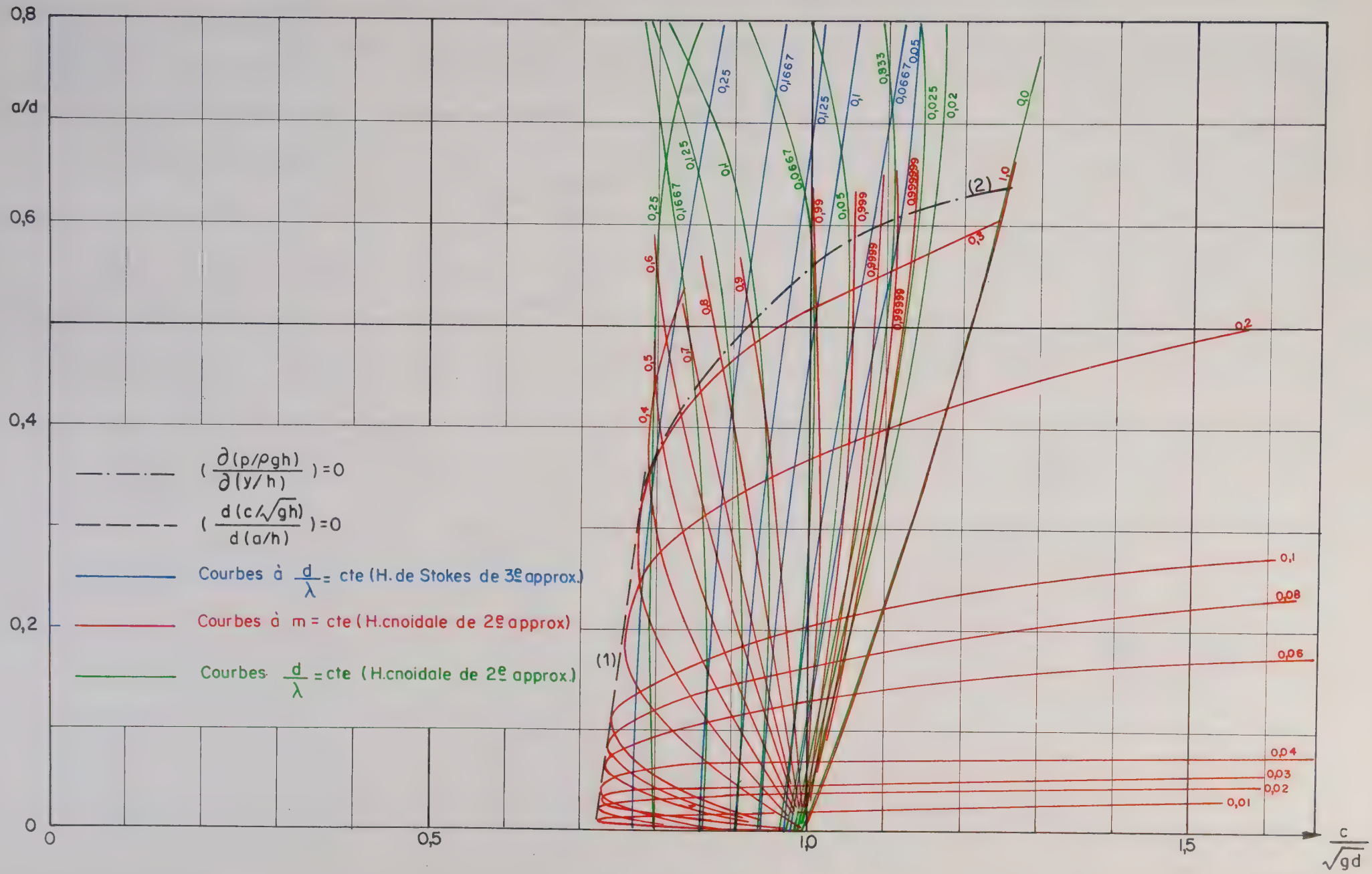

COURBES A LONGUEUR D'ONDE RELATIVE CONSTANTE ET COURBES A m CONSTANT
a/d
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,5
1,0
1,5
c/√gd
(1)
(2)
$\left(\frac{\partial(p/\rho gh)}{\partial(y/h)}\right)=0$
$\left(\frac{d(c/\sqrt{gh})}{d(a/h)}\right)=0$
Courbes à $\frac{d}{\lambda}$ = cte (H. de Stokes de 3e approx.)
Courbes à m = cte (H.cnoidale de 2e approx)
Courbes $\frac{d}{\lambda}$ = cte (H.cnoidale de 2e approx.)

Fig. VII

HOULE CNOIDALE DE DEUXIEME APPROXIMATION

Courbes d'isocélérité et courbes à m constant

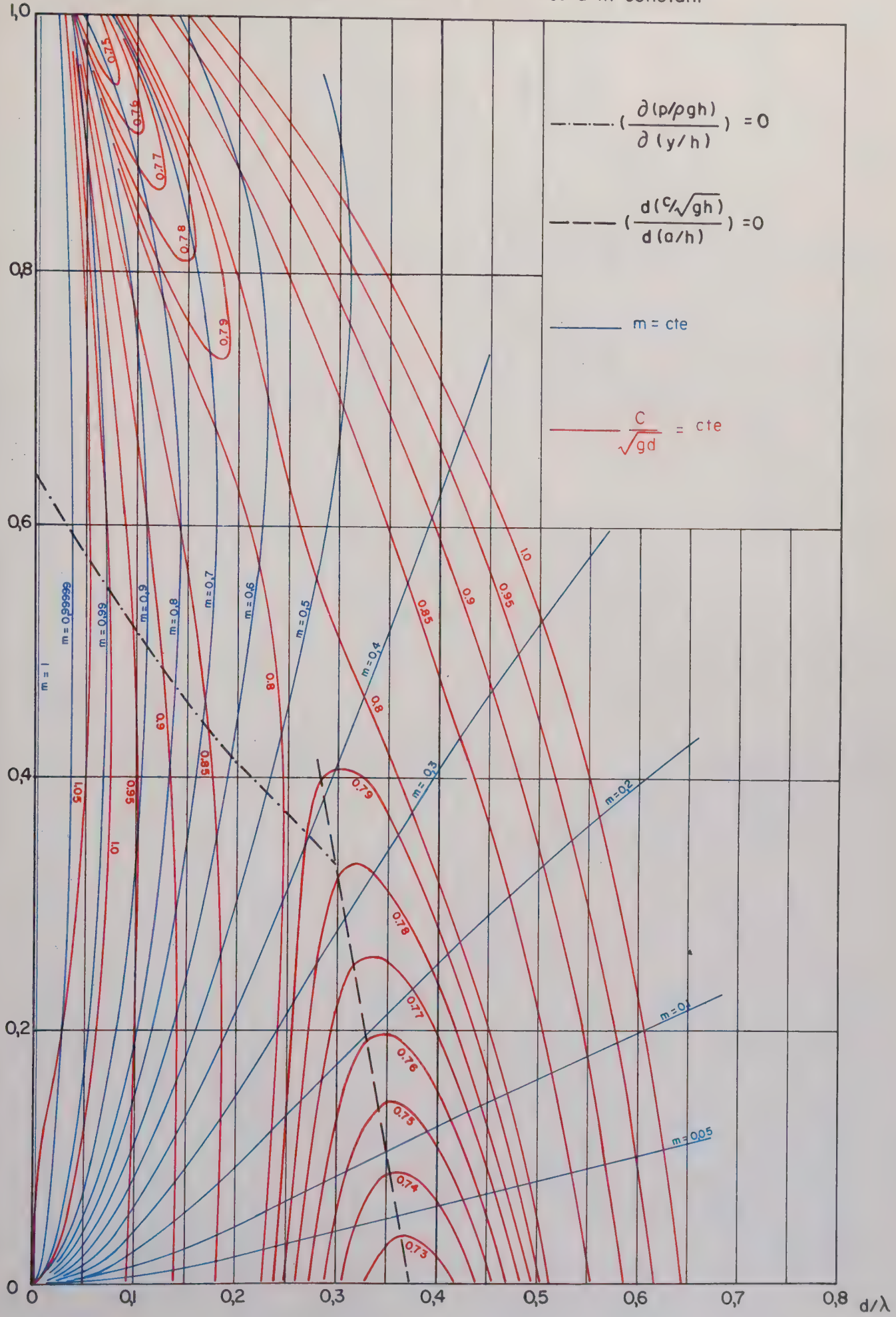


Fig. VIII

HOULE CNOIDALE DE DEUXIEME APPROXIMATION

Courbes d'isocélérité et courbes à m constant

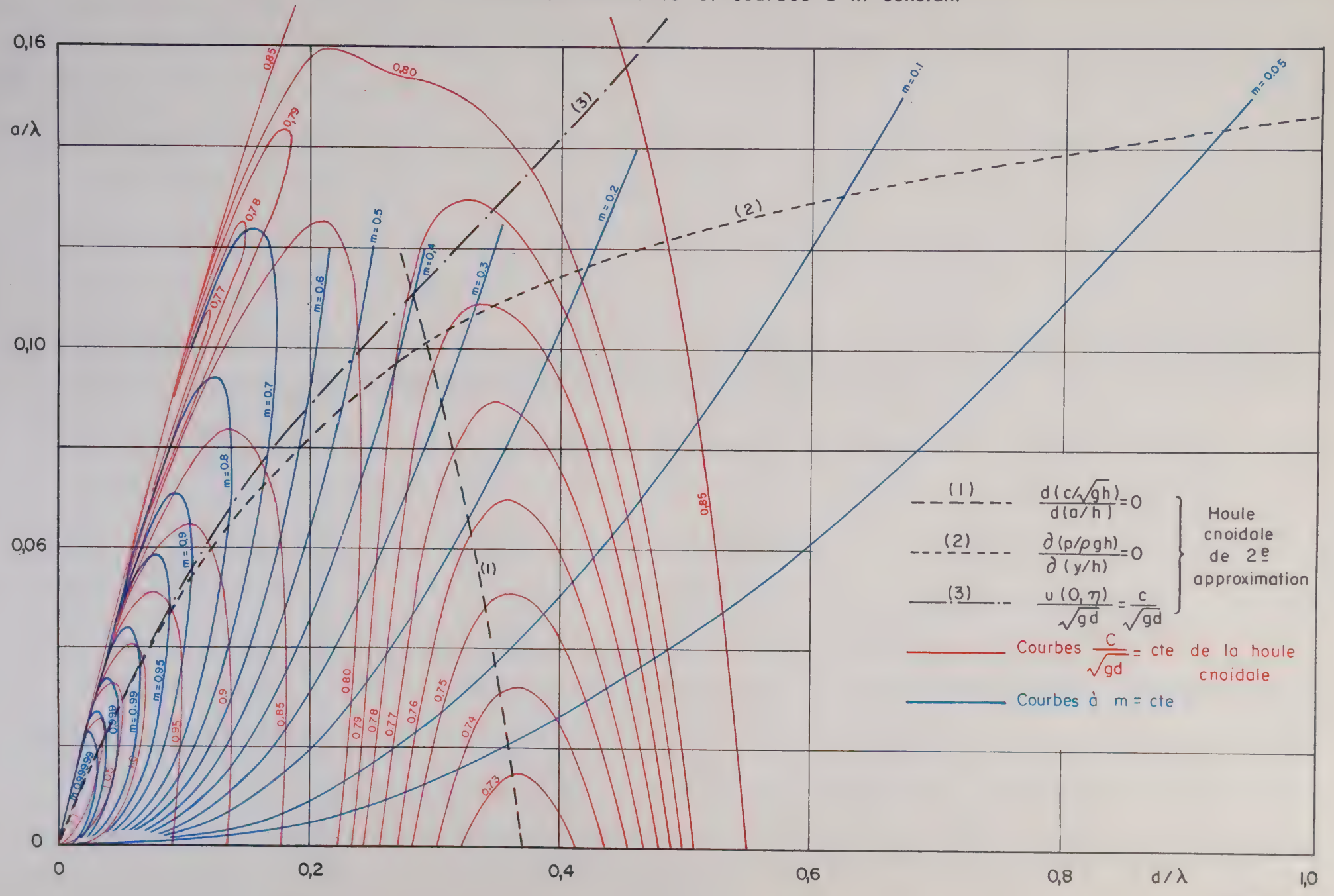


Fig. IX

VARIATION DE LA PRESSION EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE
EN UN POINT SITUÉ AU FOND, SOUS UNE CRÊTE

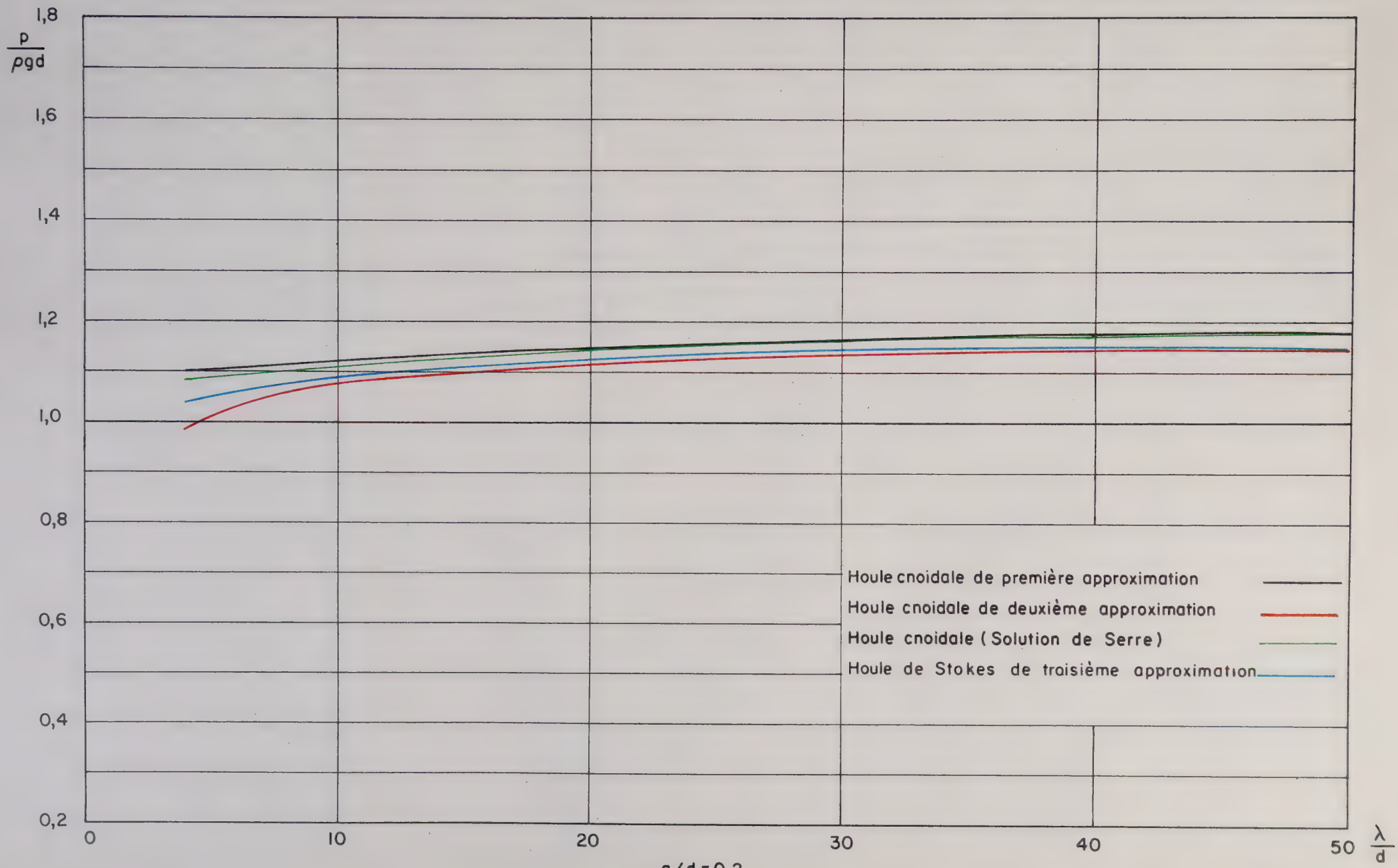


Fig. X A (a)

VARIATION DE LA PRESSION EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE
EN UN POINT SITUÉ AU FOND, SOUS UNE CRÊTE

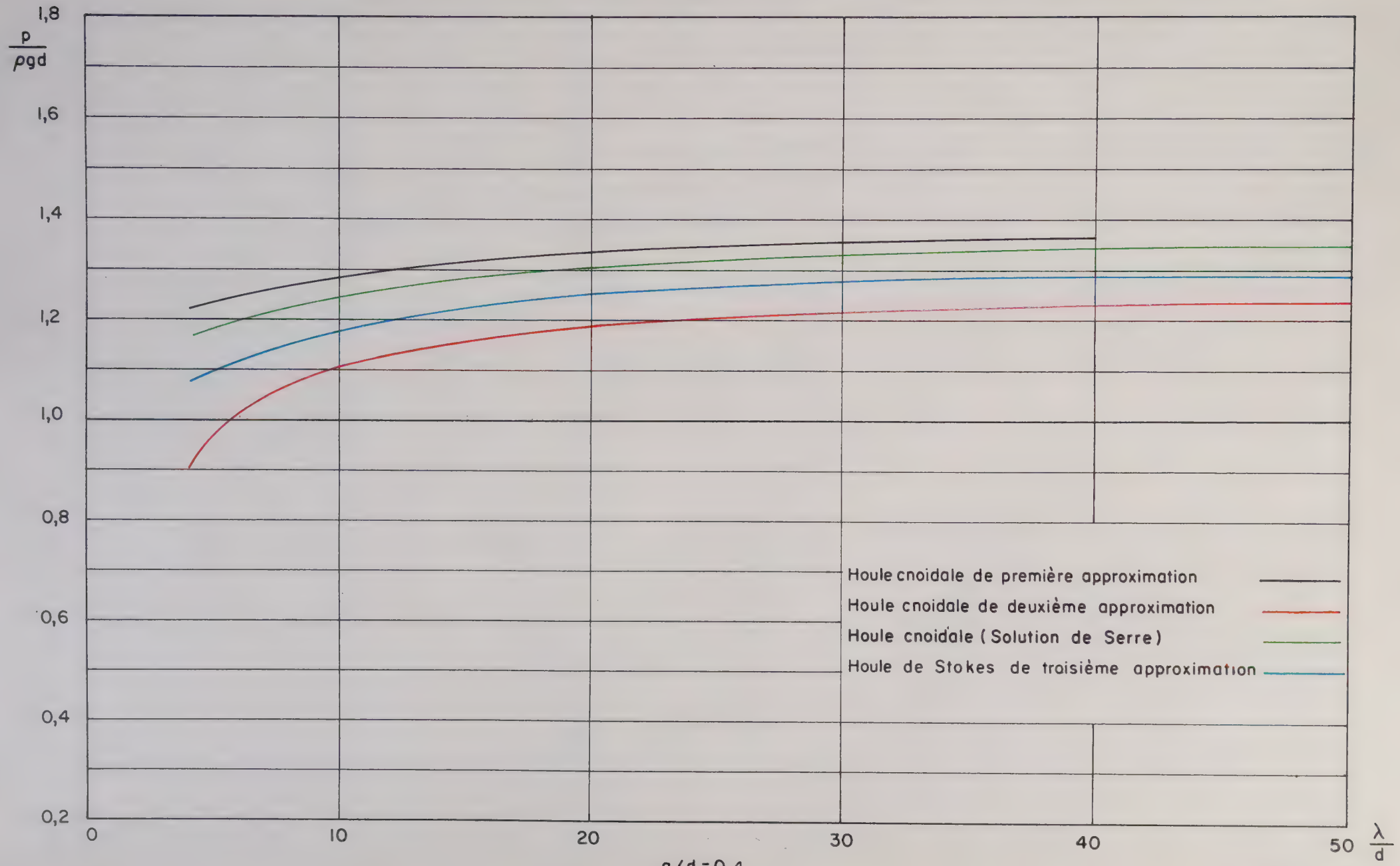


Fig. X A (b)

VARIATION DE LA PRESSION EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE
EN UN POINT SITUÉ AU FOND, SOUS UNE CRÊTE

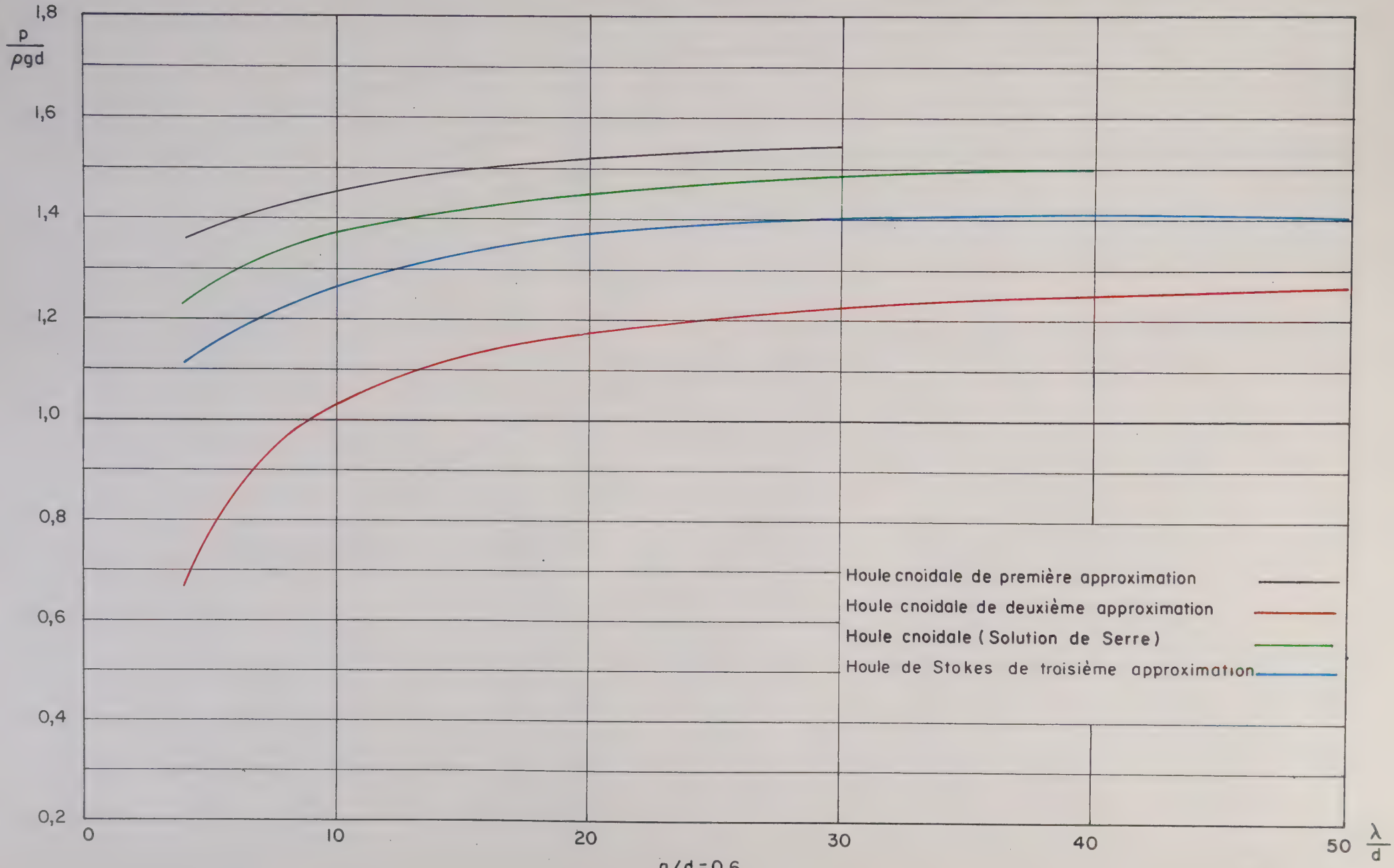


Fig. X A (c)

VARIATION DE LA PRESSION EN FONCTION DE LA LONGUEUR D'ONDE
EN UN POINT SITUÉ AU FOND, SOUS UNE CRÊTE

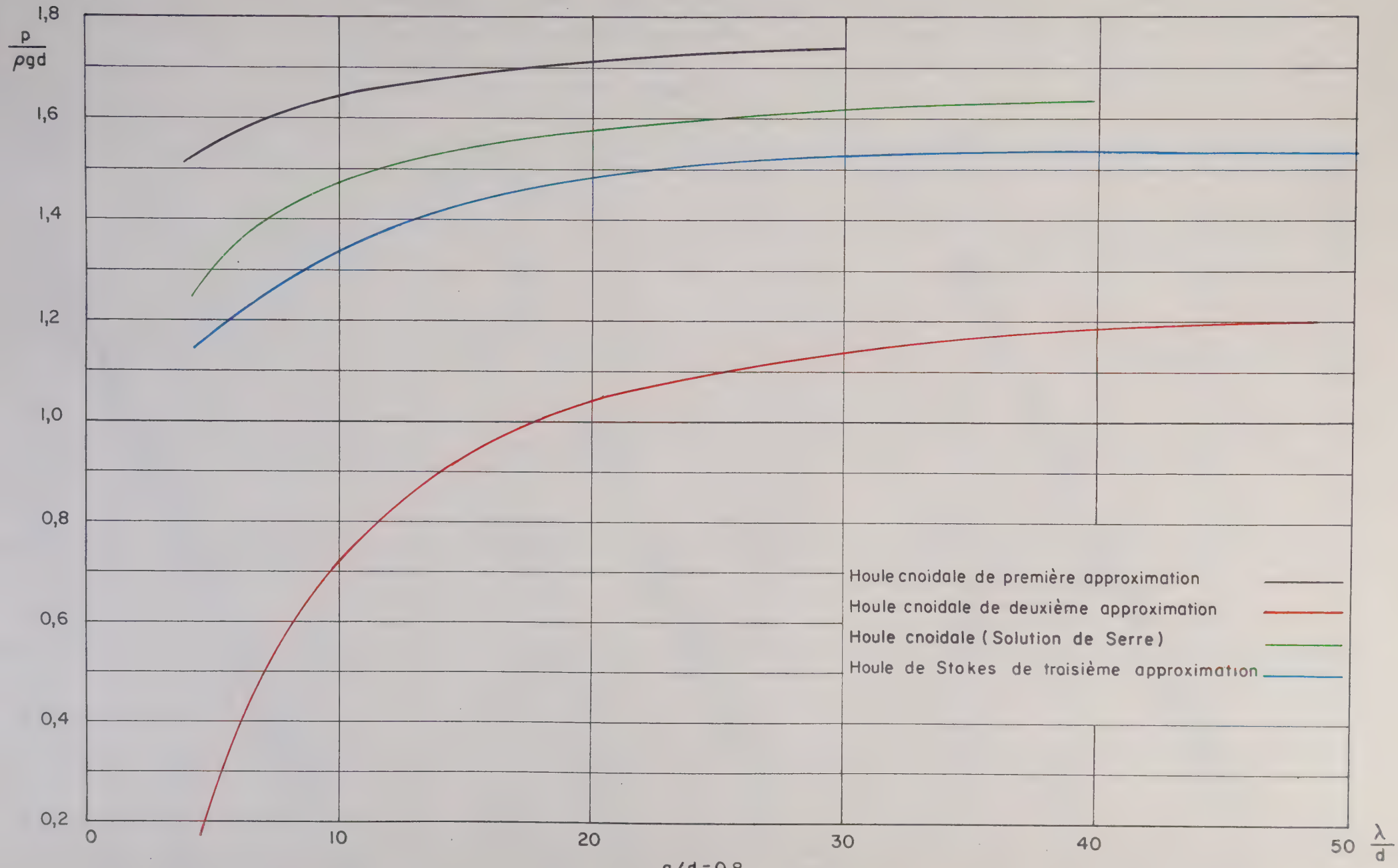


Fig. X A (d)

DISTRIBUTION DES PRESSIONS DANS UNE SECTION SITUEE EN CRETE a/d=0,2

Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

Houle de Stokes de troisième approximation

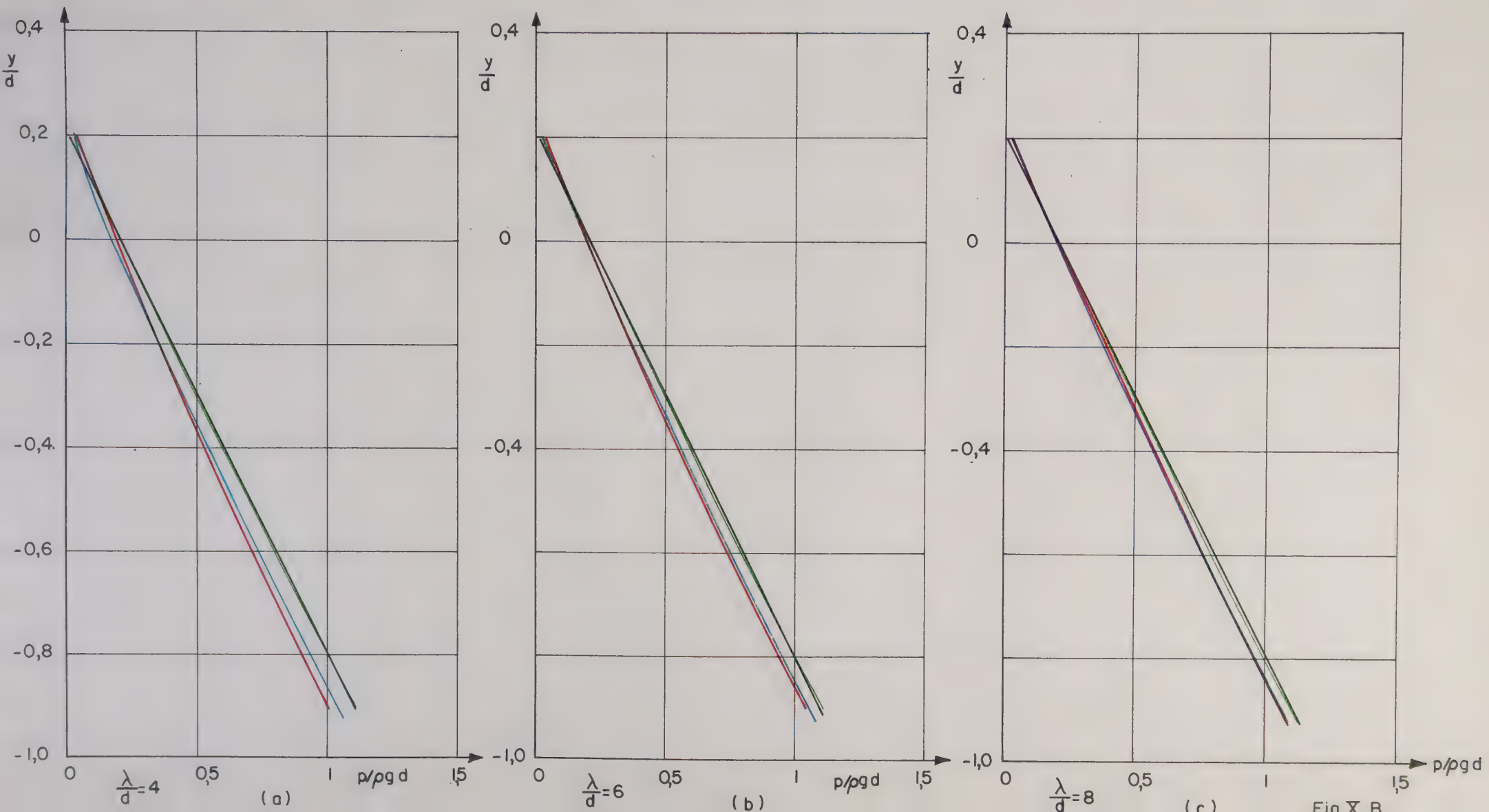


Fig X B

DISTRIBUTION DES PRESSIONS DANS UNE SECTION SITUEE EN CREUX a/d=0,2

Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

Houle de Stokes de troisième approximation

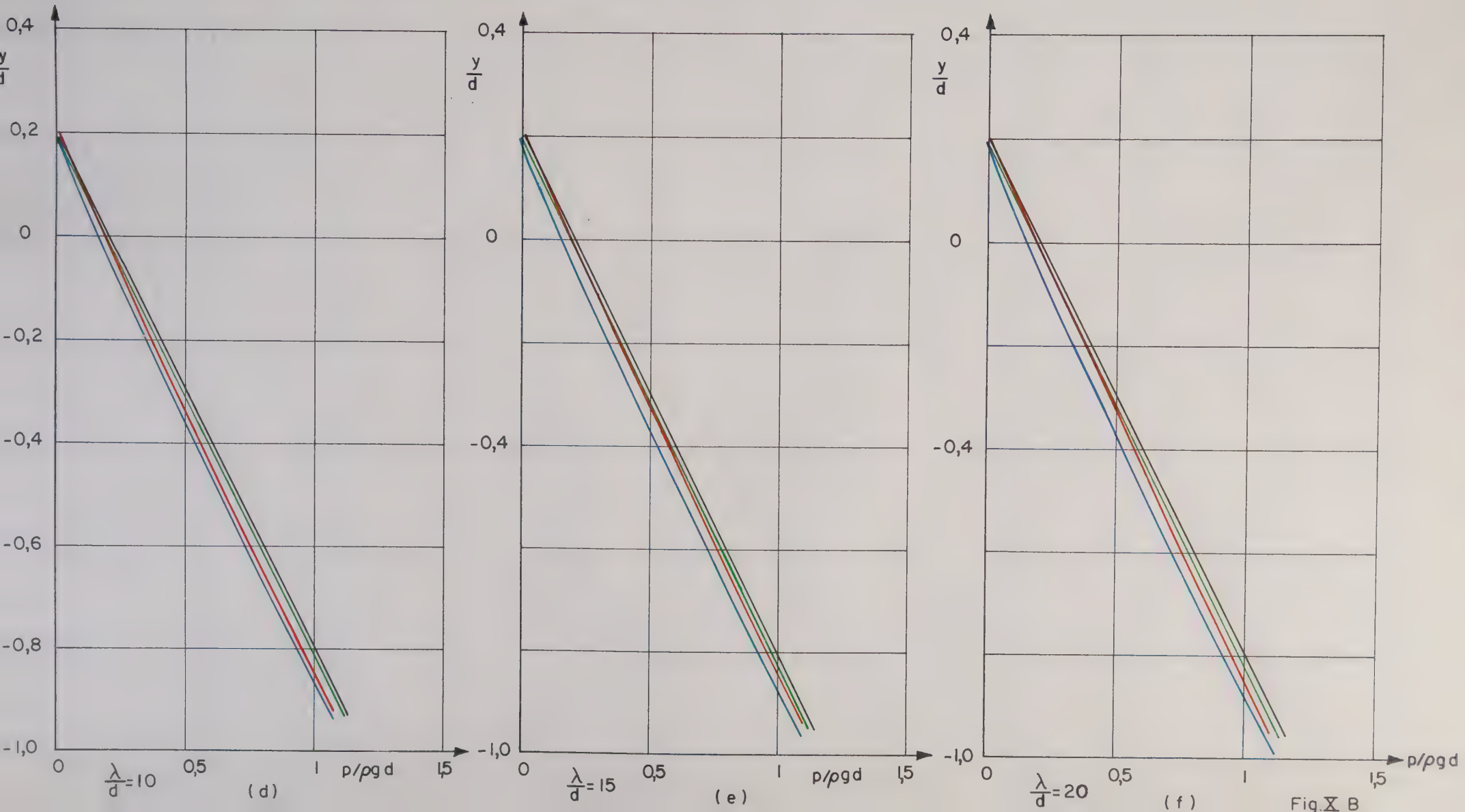


Fig. X B

DISTRIBUTION DES PRESSIONS DANS UNE SECTION SITUEE EN CRETE a/d=0,2

Houle cnoidale de première approximation

Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

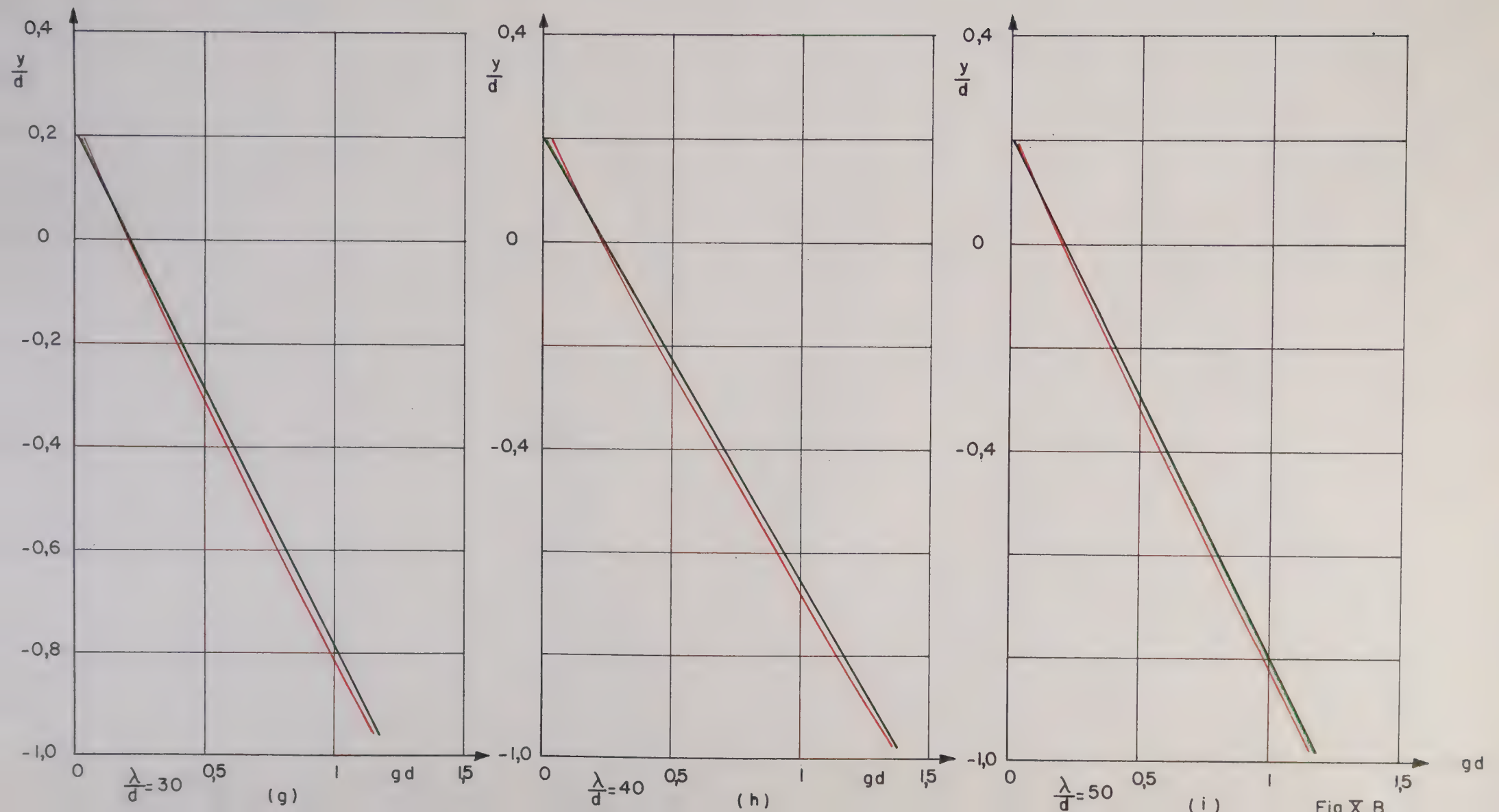


Fig X B

DISTRIBUTION DES PRESSIONS DANS UNE SECTION SITUEE EN CRETE

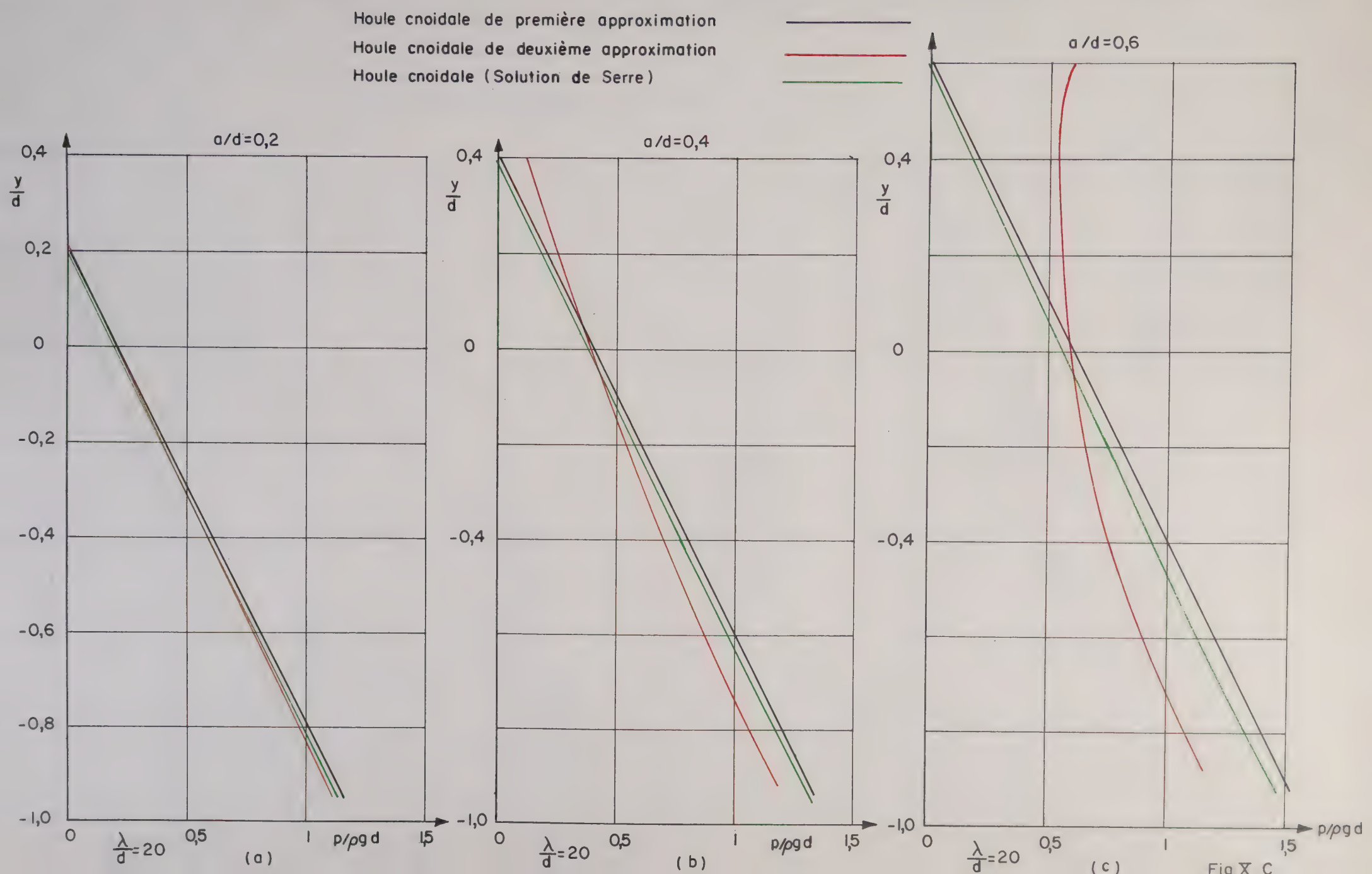


Fig X C

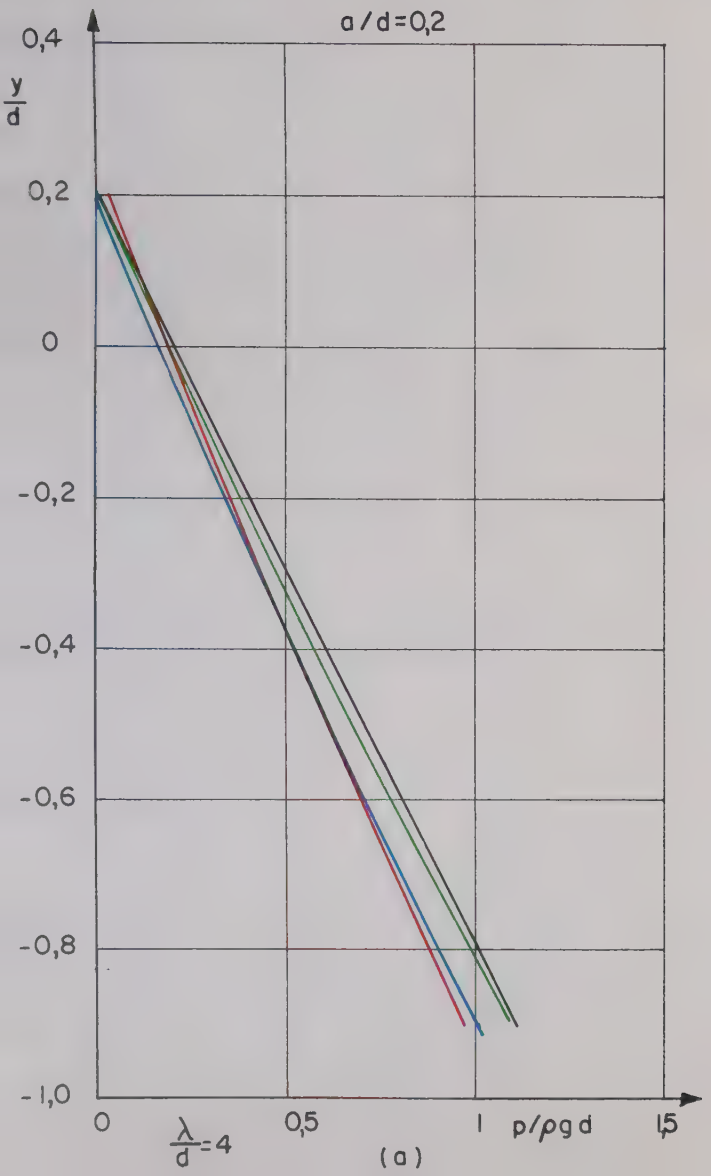
DISTRIBUTION DES PRESSIONS DANS UNE SECTION SITUEE EN CRETE

Houle cnoidale de première approximation

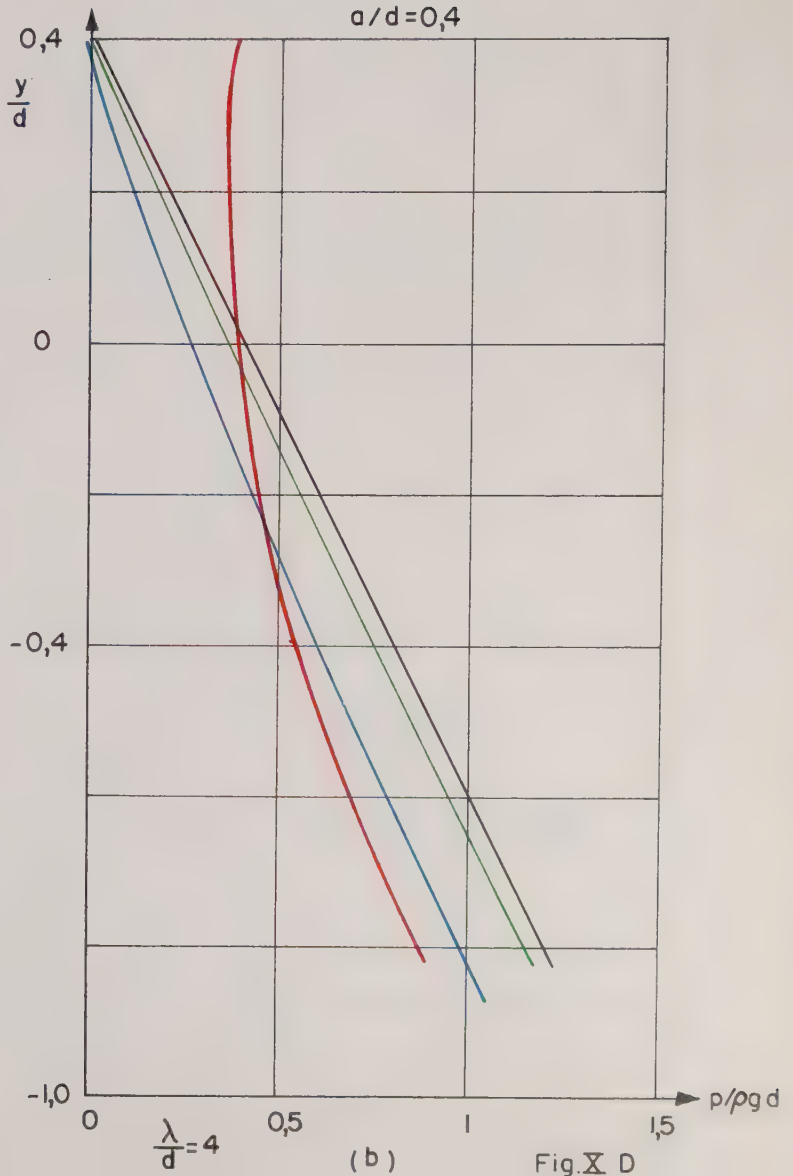
Houle cnoidale de deuxième approximation

Houle cnoidale (Solution de Serre)

Houle de Stokes de troisième approximation



(a)



(b)

Fig. X D

LIMITES DE LA HOULE CNOIDALE DE DEUXIEME APPROXIMATION

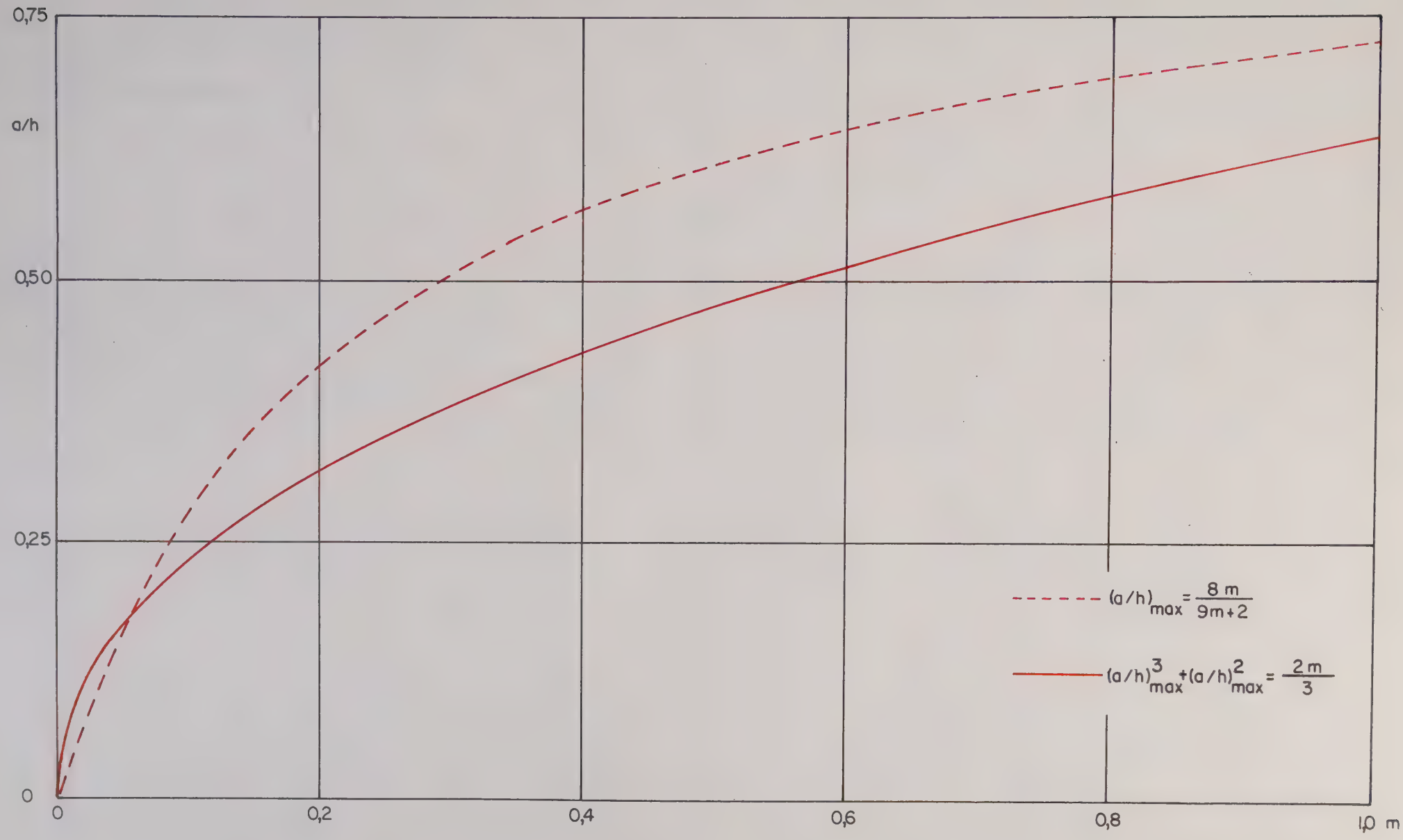


Fig. XI

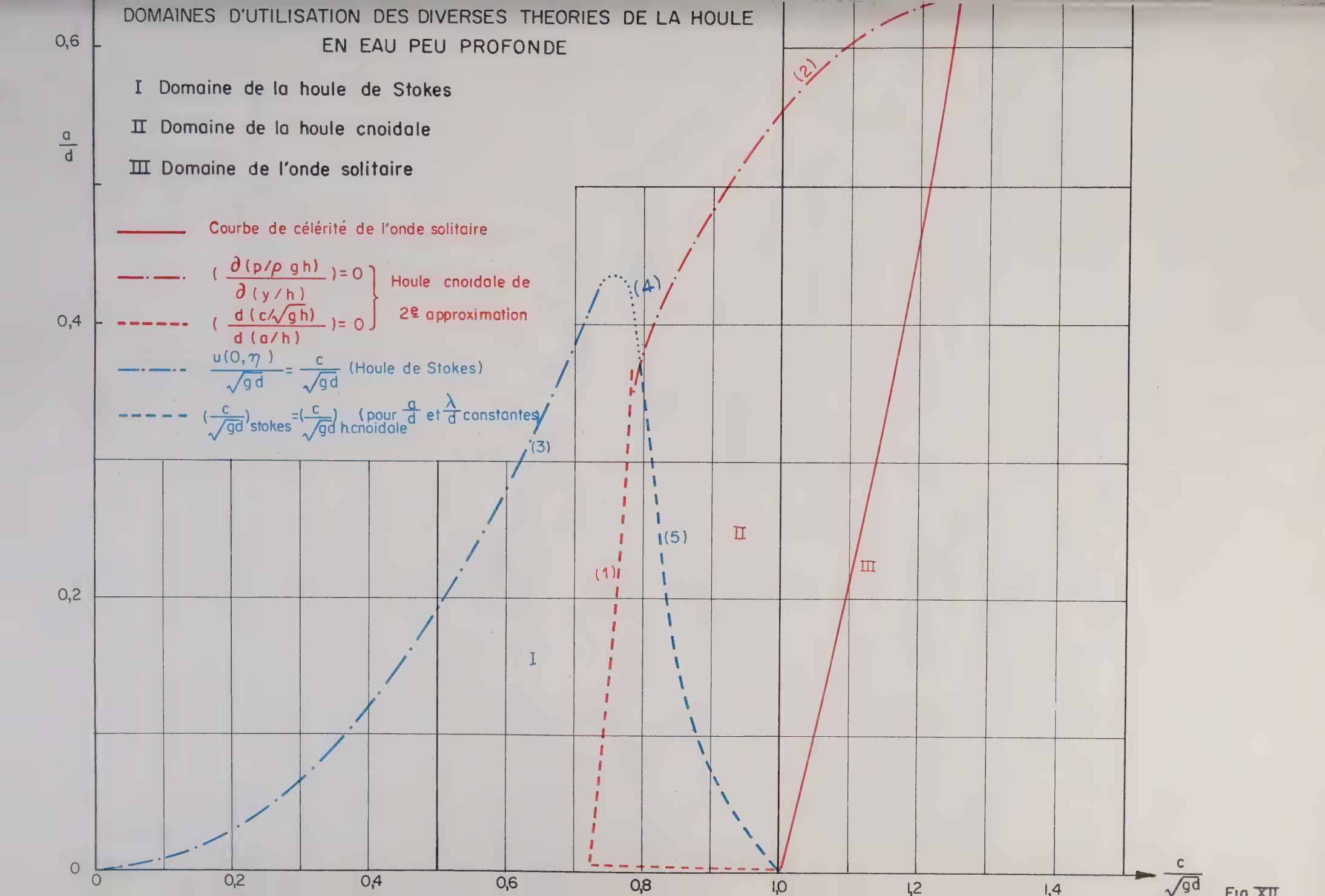

DOMAINES D'UTILISATION DES DIVERSES THEORIES DE LA HOULE
EN EAU PEU PROFONDE
I Domaine de la houle de Stokes
II Domaine de la houle cnoidale
III Domaine de l'onde solitaire
Courbe de célérité de l'onde solitaire
$\left(\frac{\partial (p/\rho g h)}{\partial (y/h)}\right) = 0$
$\left(\frac{d (c/\sqrt{gh})}{d (a/h)}\right) = 0$
Houle cnoidale de 2e approximation
$\frac{u(0,\eta)}{\sqrt{gd}} = \frac{c}{\sqrt{gd}}$ (Houle de Stokes)
$\left(\frac{c}{\sqrt{gd}}\right)_{stokes} = \left(\frac{c}{\sqrt{gd}}\right)_{h.cnoidale}$ (pour $\frac{a}{d}$ et $\frac{\lambda}{d}$ constantes)
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
I
II
III
$\frac{a}{d}$
$\frac{c}{\sqrt{gd}}$
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4

Fig XII

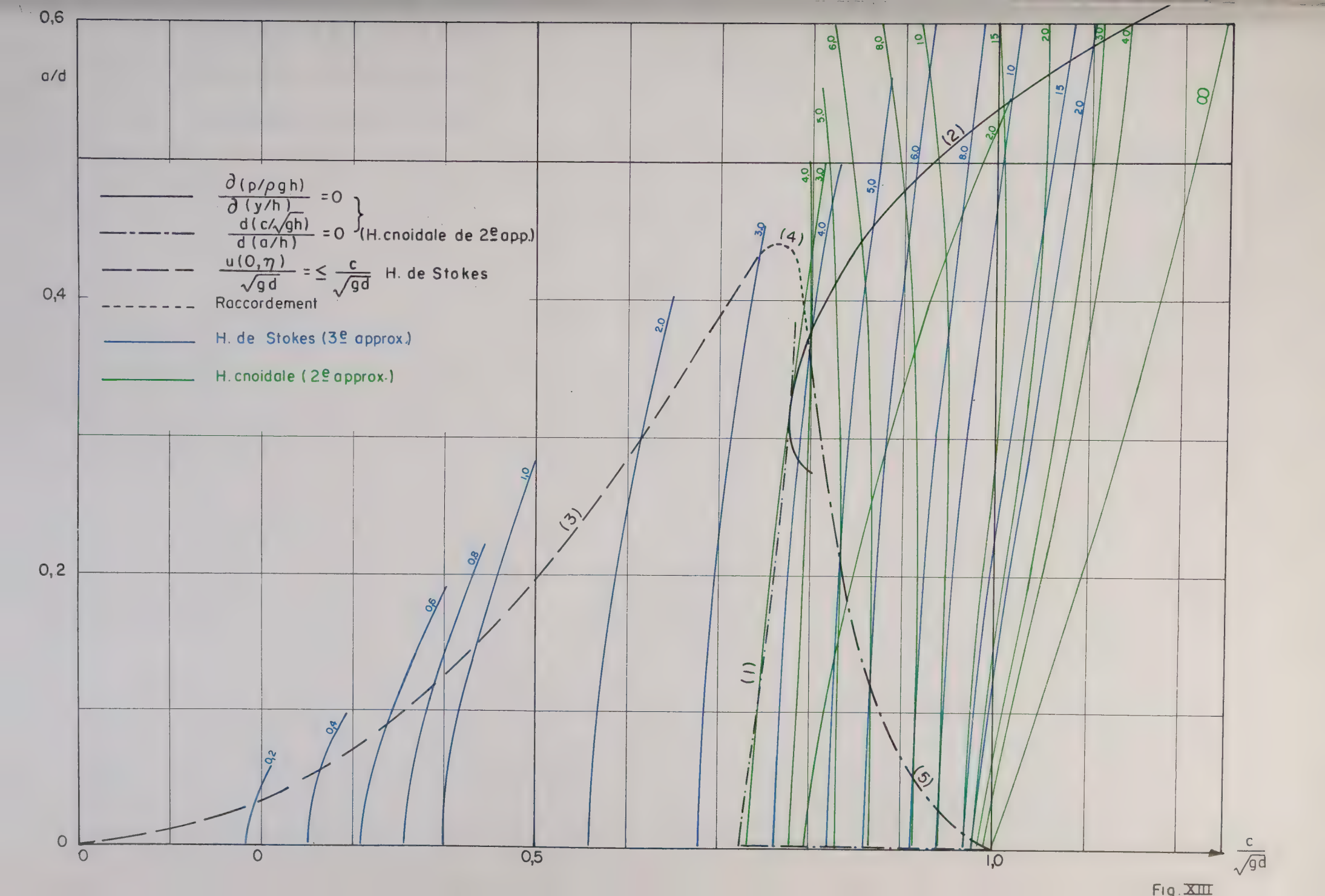

0,6
a/d
0,4
0,2
0
0
0
0,5
1,0
$\frac{c}{\sqrt{gd}}$
$\frac{\partial (p/\rho g h)}{\partial (y/h)} = 0$
$\frac{d(c/\sqrt{gh})}{d(a/h)} = 0$
(H. cnoidale de 2e app.)
$\frac{u(0,\eta)}{\sqrt{gd}} = \leq \frac{c}{\sqrt{gd}}$ H. de Stokes
Raccordement
H. de Stokes (3e approx.)
H. cnoidale (2e approx.)
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
2,0
3,0
4,0
5,0
6,0
8,0
10
15
20
30
40
∞

Fig. XIII

I Domaine de la houle de Stokes

II Domaine de la houle cnoidale

III Domaine de l'onde solitaire

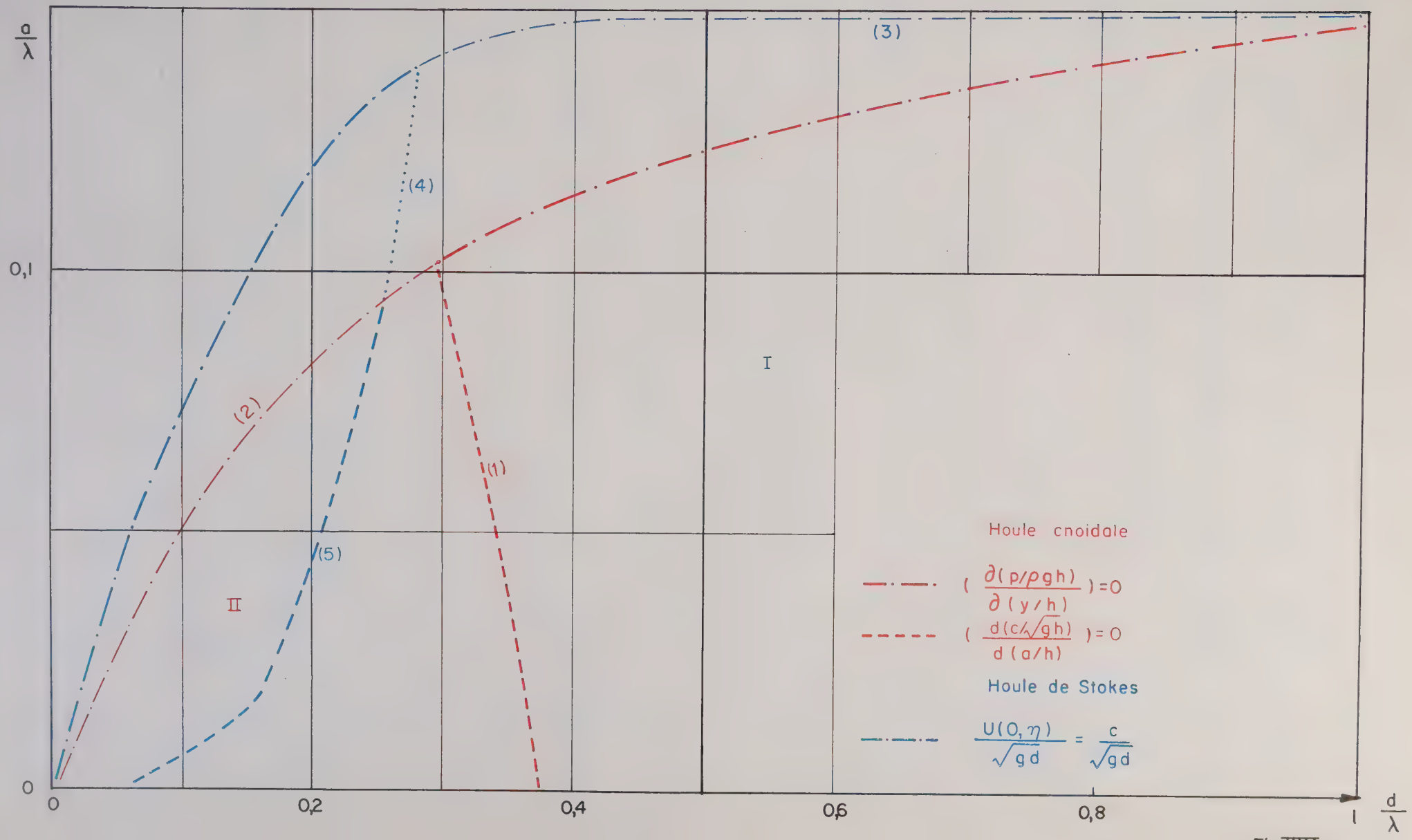


Fig. XIV

LIMITES DE LA HOULE CNOIDALE DE DEUXIEME APPROXIMATION

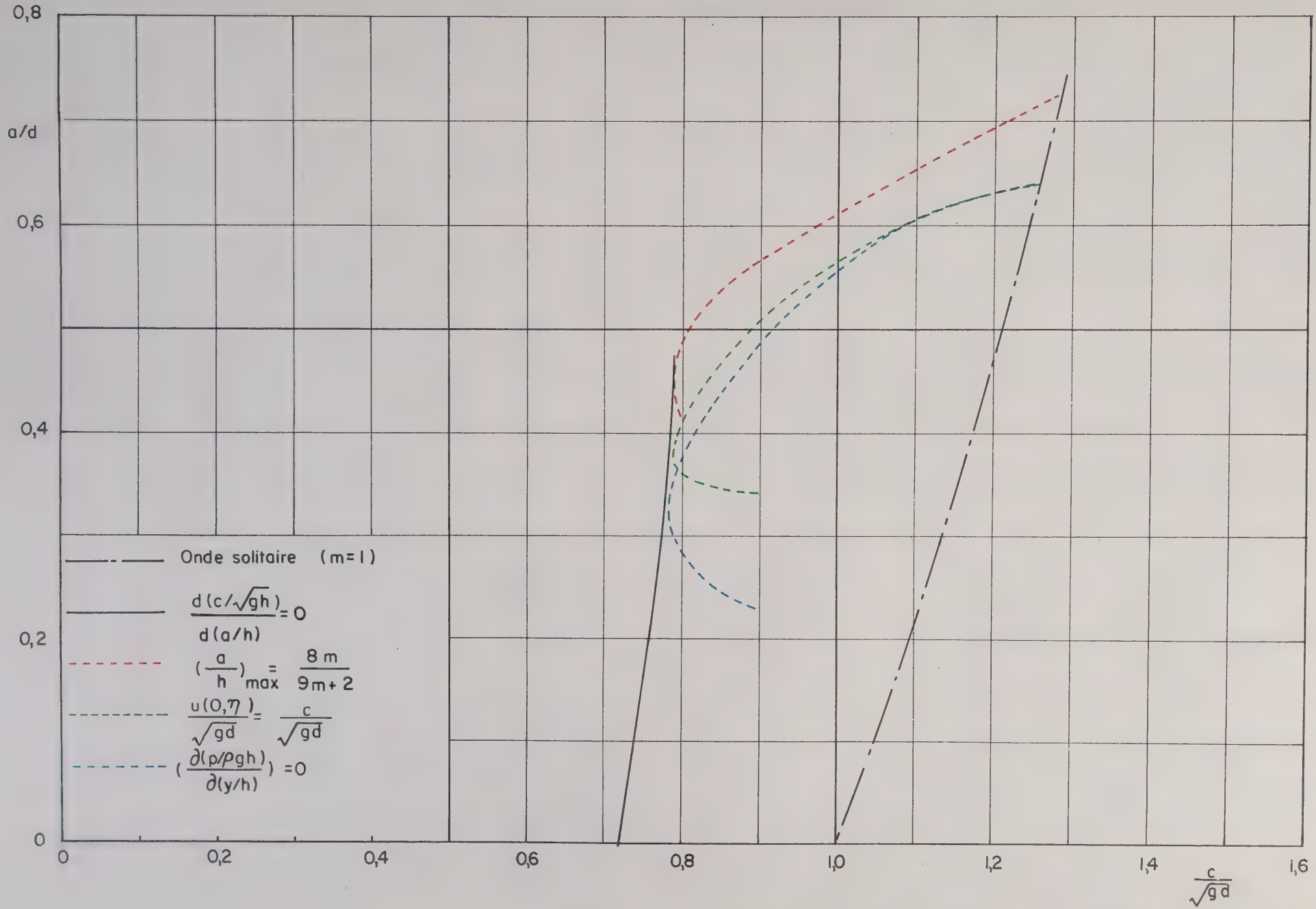


Fig. XV

HOULE CNOIDALE DE DEUXIEME APPROXIMATION ET HOULE DE STOKES DE TROISIEME APPROXIMATION

Courbes d'isocélérité

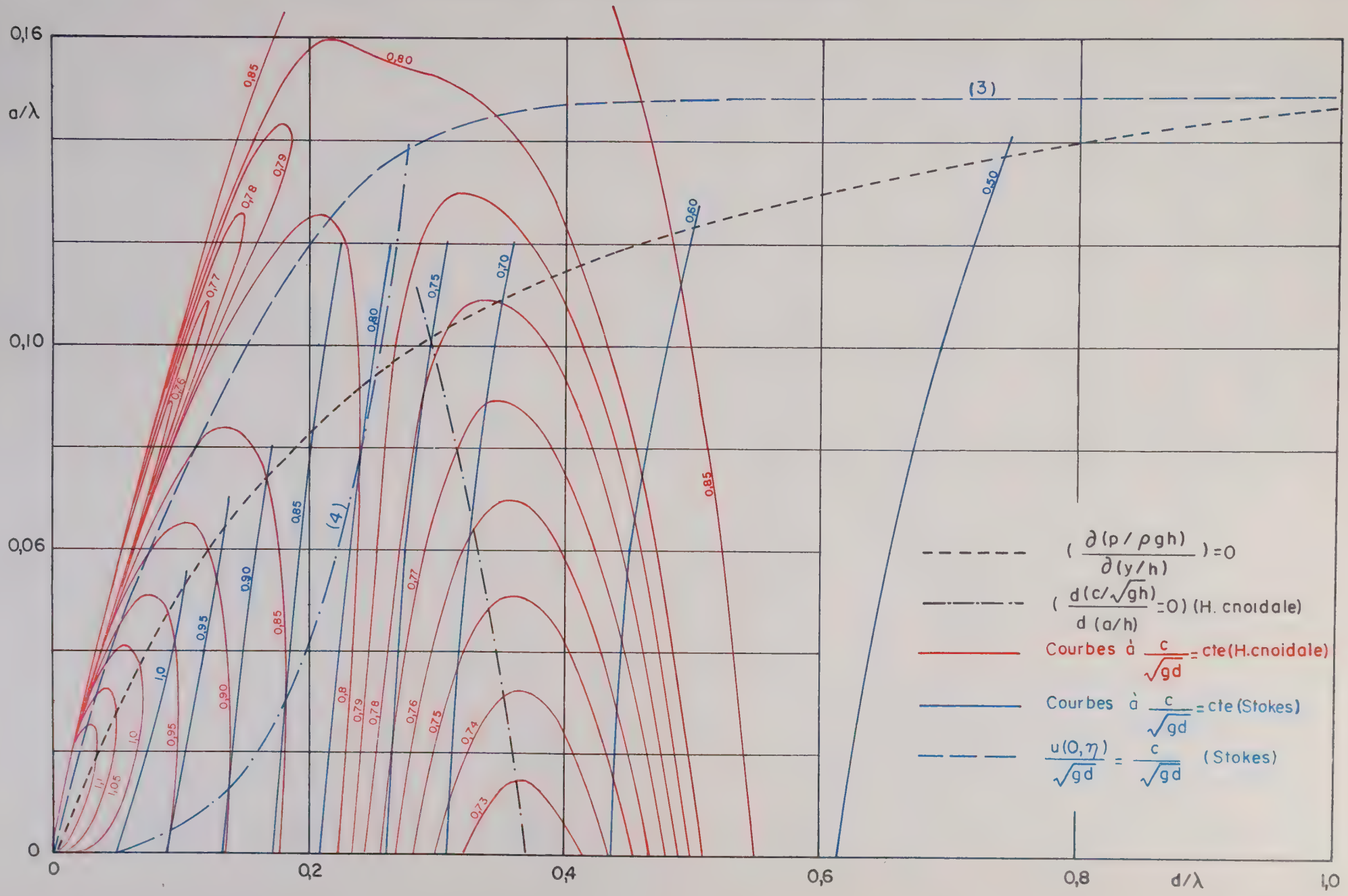


Fig. XVI

LES CAMBRURES LIMITES DE LA HOULE

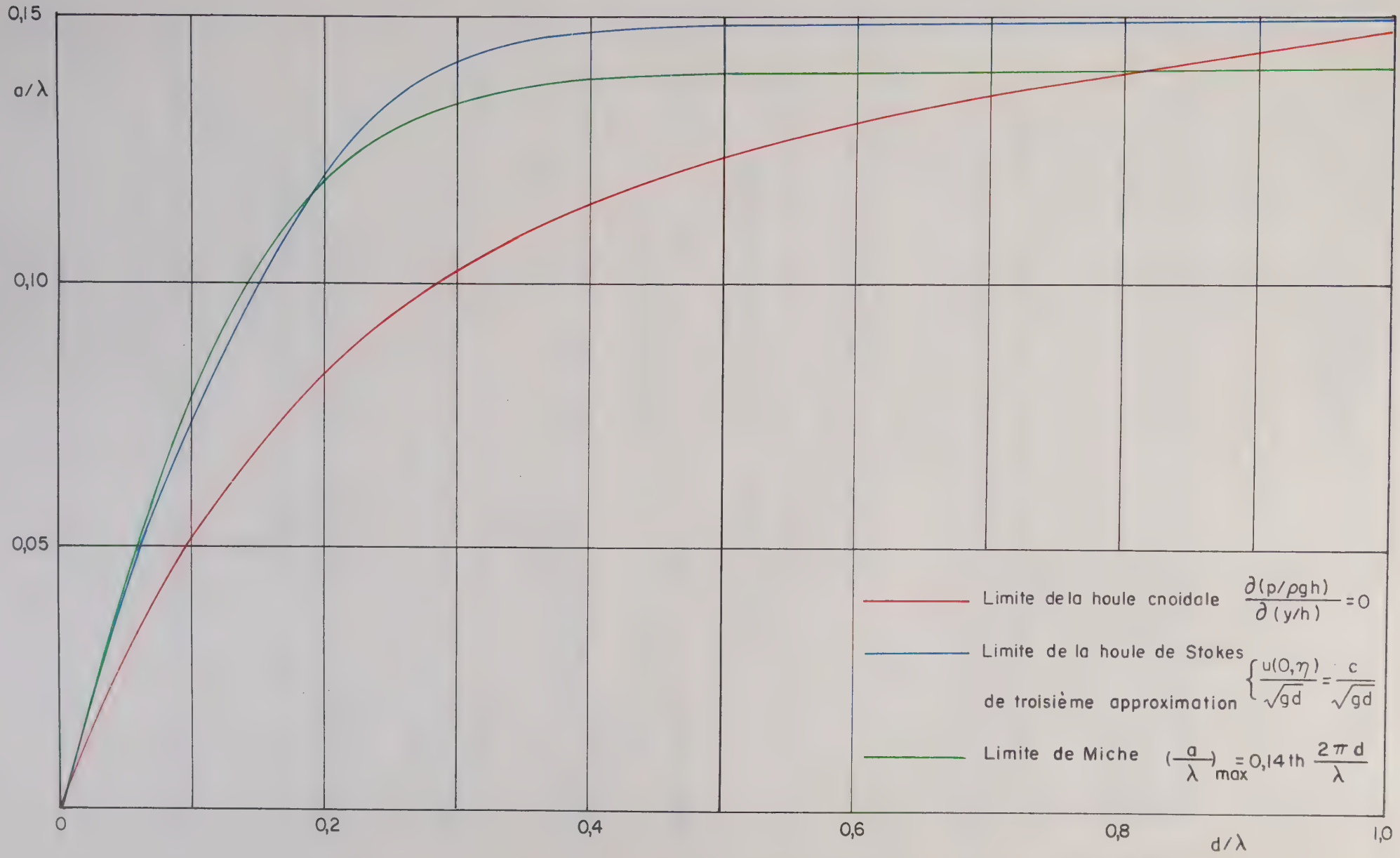


Fig. XVII

BIBLIOGRAPHIE

1 - BARRE DE SAINT-VENANT J.C. , Théorie du mouvement non permament des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit, comptes rendus de l'Académie des Sciences, T. 73, p. 147-154 et 237-240, (1871).

2 - BOUSSINESQ J. , Essai sur la théorie des eaux courantes, Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie des Sciences, T. 23 et 24, (1877)

3 - CAUDRON L. , Contributions à l'étude des ondes de Favre, E.D.F., L.N.H., Rapport N° HYGE 840, (1968), (non publié).

4 - COURANT R. et HILBERT D., Methods of mathematical physics, Vol 1 et 2 Interscience Publishers Inc, New-York (1953).

5 - DAUBERT A., Théorie approchée de la houle pure et de la houle complexe, Publi. Sci. et Tech. du Ministère de l'Air N° 375 (1961)

6 - DAUBERT A., Equations lagrangiennes des ondes longues, E.D.F., L.N.H., Rapport N° Gr.R. 133, (1967), (non publié).

7 - DAUBERT A. et MARVAUD P., Etude de la formation d'ondes secondaires par une méthode d'intégration numérique, comptes rendus du XIème Congrès de l'A.I.R.H. (Léningrad) Vol 1, ch. 3-12, (1965).

8 - DAUBERT A. et WARLUZEL A., Modèle mathématique de la propagation d'une houle et de sa réflexion sur une plage, comptes rendus du XIIème Congrès de l'A.I.R.H. (Fort Collins) II - 1.4, Vol 4, Ch. 30, p. 291-296 (1967).

9 - DE S.C., Contribution to the theory of Stokes waves,Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 51, p. 713-736 (1955)

10 - ECKART C., Variation principles of hydrodynamics, Phy. of Fluids, Vol. 3, N° 3, p. 421-427, (1960)

11 - FAVRE H., Etude théorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux découverts, Dunod, Paris, (1935).

12 - FRIEDRICHS K.O., On the derivation of the shallow water theory, Comm. Pure and Appl. Math., Vol 1, p. 81-85 (1948).

13 - FRIEDRICHS K.O. et HYERS D.H., The existence of solitary waves, Comm. Pure and App. Math., Vol 7, p. 517-550 (1954)

14 - GARDING L., Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, Acta. Math, Vol 85, p 1-62, (1951).

15 - GERMAIN J.P., Sur la théorie non linéaire des ondes longues, C.R.A.S., T. 256 Ser A, p. 4588-4590, (1963).

16 - GERMAIN J.P., Sur la théorie formelle des houles longues rotationnelles, C.R.A.S. T. 258 Cr 2, p. 1148-1150, (1964).

17 - GERMAIN J.P., Etude des séries utilisées dans la théorie de la houle en eau peu profonde, C.R.A.S. Ser A,T. 262 N° 11 p. 647-648, (1966)

18 - GERMAIN J.P., Etude des houles de Struik - Gouyon au voisinage de la vitesse critique, C.R.A.S. Ser A , T 262 N° 21, p. 1202-1204 et N° 22 p. 1260-1262, (1966).

19 - GERMAIN J.P., Contribution à l'étude de la houle en eau peu profonde. Thèse de Doctorat, Fac. des Sciences, Univ. de Grenoble (1967).

20 - GOUYON R., Contribution à la théorie des houles, Ann. Fac. Sci. Univ. de Toulouse, Sci. Math. et Phys., 224, (1958).

21 - HERIVEL J.W., The derivation of the equations of motion of an ideal fluid by Hamilton's principle, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol 51, p. 344-349, (1955).

22 - ISAACSON E. et KELLER H.B., Analysis of numerical methods,John Wiley New-York, (1966).

23 - KANTOROVICH L.V. et KRYLOV V.I., Approximate methods of higher analysis, Interscience Publishers Inc, New-York, (1964).

24 - KELLER J.B., The solitary wave and periodic waves in shallow water, Comm. Pure & App. Math., Vol 1, p. 323-339, (1968).

25 - KORTEWEG D.J. et DE VRIES G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of stationary waves, Phil. Mag. Ser 5, Vol 39, p. 422-443, (1895)

26 - KRAVTCHENKO J., T - Houle de Gerstner, II - Aperçu de la théorie générale de la houle. Cours de 3ème cycle d'hydrodynamique, Université de Grenoble, (1957).

27 - LAITONE E.V., The second approximation to cnoïdal and solitary waves, J. Flu Mech. Vol 9, Part 3, p. 430-444, (1960).

28 - LAITONE E.V., Limiting conditions for cnoïdal and Stokes waves, J. Geop, Research, Vol 67, N° 4, p. 1555-1564, (1962).

29 - LAX A., On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics, Comm. Pure & App. Math. Vol 9, p. 135-169, (1956)

30 - LAX P.D., Hyperbolic systems of conservation laws II, Comm. Pure & App. Math., Vol 10, p. 537-566, (1957).

31 - LITTMAN W., On the existence of periodic waves near critical speed, Pure & Appl. Math. Vol 10 n° 2, p. 241-269 (1957).

32 - LUKE J.C., A variational principle for a fluid with a free surface, J. of Fluid Mech. Vol 27, Part 2, p. 395-397, (1967).

33 - LUKE J.C., A perturbation method for non linear dispersive wave problem, Proc. Roy. Soc. (London) , Ser A, Vol. 292, p. 403-412, (1966).

MICHE R., Mouvement ondulatoire de la mer en profondeur constante ou décroissante - Annales des Ponts et Chaussées, 114ème année, pp. 25-78, 130-164, 270-292, 369-406, (1944).

34 - RICHTMYER R.D. et MORTON K.W., Differnce methods for initial - value problems. Interscience Publishers Inc.,New-York, (1967).

35 - SERRE F., Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux, la Houille Blanche, p. 374-388 et p. 830-872, (1953).

36 - STOKER J.J. , Water waves, Interscience Publishers Inc., New-York, (1957)

37 - STOKES G.G., On the theory of oscillation waves,Math. & Phy. Papers, Camb. Univ.Press. Vol 1, p. 197-229 et p. 314-326, (1880).

38 - STRUIK D.J., Détermination rigoureuse des ondes irrotationnelles périodiques dans un canal de profondeur finie. Annales de Mathématiques, Vol. 95, p. 595-634, (1926).

39 - WEHAUSEN J.V. et LAITONE E.V., Surface waves, Handbuch der Physik, Vol 9, p. 446-478, (1960).

40 - WHITHAM G.B., A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangean, J. Fluid Mech, Vol. 22, Part 2, p. 273-283, (1965).

41 - WHITHAM G.B., Variational methods and applications to water waves, Proc. Roy. Soc., A 299, p. 7-25, (1967)

42 - WHITHAM G.B., Some comments on wave propagation and shoch wave structure with application to magnetohydrodynamics, Comm. Pure & App. Math. Vol 12 n° 1, p. 113-158, (1959).

43 - VON NEWMANN J., Use of variatonial methods in hydrodynamics (Memorandum to O. Veblen (1945), John Von Newmann - Collected works, Vol VI, p. 357-359, Pergamon Press, New-York, (1963)

VU

Grenoble, le 15 FEV. 1972

Le Président de la thèse

Julien Kaldor

VU, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 15 FEV 1972

Le Président de l'Université
Scientifique et Médicale